

Mécanique des fluides et capillarité

Préparation à l'agrégation de l'ENS de Lyon 2019-2020

Préambule

Bibliographie

- J.M. BRÉBEC, *Mécanique des fluides*, "H-Prépa" Hachette (1998). Cours de CPGE classique avec toutes les notions présentées proprement.
- J.P. FAROUX et J. RENAULT, *Mécanique des fluides et ondes mécaniques*, "J'intègre" Dunod (1999). Cours avec beaucoup de physique, avec des calculs moins détaillés.
- É. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT, *Hydrodynamique physique*, CNRS Éditions (2010). Référence pour la mécanique des fluides.
- Cours de Mécanique des Fluides de Renée Gatignol, Professeur Emerite à l'UPMC, disponible en ligne à <http://www.edu.upmc.fr/sdi/LA202/>
- P.-G. DE GENNES, F. BROCHARD-WYART et D. QUÉRÉ, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin (2013). Principale référence pour la capillarité.
- B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER et B. ROULET, *Thermodynamique*, Hermann (2007). Pour les aspects thermodynamiques de la capillarité.

Les sujets traitant de la mécanique des fluides ne sont pas si nombreux mais le thème tombe en écrit tout de même :

- Épreuve B 2001 : du cours de base au début et une application en géologie.
- Épreuve B 2004 : une partie sur la pression acoustique nécessitant quelques notions de mécanique des fluides.
- Épreuve B 2006 : une partie de cours, effet Venturi, Tube de Pitot et portance.
- Épreuve B 2009 : application à une éolienne.
- Épreuve B 2013 : sujet sur la capillarité très complet... peut-être un peu trop.

Le contenu de ce cours est fait de façon à couvrir les programmes au niveau BAC+2 (voire BAC+3) pour la composition de Physique, et ceux de BCPST 1 et 2 et du BTS "Métiers de la chimie" pour la leçon de Physique. Pour autant, l'objectif premier est de parler de Mécanique des fluides et d'avoir le plus possible de clés pour comprendre la physique mise en jeu. Je vous invite donc à consulter les programmes pour vous assurer de traiter les leçons avec un contenu adapté. Voici quelques éléments de programmes.

STS MÉTIERS DE LA CHIMIE

Mousses

- Tensioactifs, différentes familles (cationiques, anioniques, amphotères, non ioniques), concentration micellaire critique (conductimétrie ou tensiométrie), notion de balance hydrophile-lipophile (HLB), microémulsions.
- Tension interfaciale : lien avec les interactions intermoléculaires, mise en évidence expérimentale, expression mathématique, différentes méthodes de mesure .
- Phénomène de mouillage, angle de raccordement (identifier les situations de mouillage total, mouillage partiel et non mouillage, selon la valeur de l'angle de raccordement).
- Loi de Young-Dupré, coefficient d'étalement.

Rhéologie

- Gradient de vitesse, contrainte de cisaillement, viscosité dynamique, viscosité cinématique. Mettre en œuvre des méthodes de contrôle de la rhéologie : viscosimétrie, rhéométrie
- Comportements rhéologiques de produits courants. Identifier à partir de rhéogrammes (courbe de viscosité, courbe d'écoulement) les comportements suivants des fluides : newtonien, plastique idéal, plastique non idéal, pseudoplastique, rhéoépaississant, thixotrope.

BCPST

- Statique des fluides : Particule de fluide, échelle mésoscopique. Densité volumique des forces de pression. Équation de la statique des fluides. Forces pressantes. Poussée d'Archimède.
- Dynamique des fluides : trajectoire, champ de vitesse, ligne de courant, bilan d'énergie mécanique. Relation de Bernoulli. Conservation de la charge. Mesure de vitesse (Pitot). Mesure de débit volumique (Tube de Venturi). Viscosités dynamique et cinématique. Force tangentielle de viscosité d'un fluide newtonien. Loi de Poiseuille, résistance hydraulique. Nombre de Reynolds. à bas Reynolds. Ecoulement en milieu poreux, Loi de Darcy. Mouvement d'une bille dans un fluide newtonien, loi de Stokes.

Table des matières

1	Le modèle du fluide. Éléments d'hydrostatique	9
1.1	Le modèle du fluide	9
1.1.1	Notion de fluide	9
1.1.2	Notion de particule fluide	9
1.2	Notion de Pression	10
1.2.1	La pression au sein d'un fluide au repos	10
1.2.2	Équation d'état	11
1.3	Équilibre mécanique d'un fluide	11
1.3.1	Relation locale traduisant l'équilibre	11
1.3.2	Cas d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur	12
1.3.3	Équilibre d'un fluide dans un référentiel non galiléen	12
1.4	Poussée d'Archimède	13
1.4.1	Solide totalement immergé dans un fluide ; Théorème d'Archimède	13
1.4.2	Remarque dans le cas de deux fluides différents. Notion de centre de poussée	14
2	Cinématique des fluides	15
2.1	Description du mouvement	15
2.1.1	Grandeurs cinématiques attachées à une particule fluide	15
2.1.2	Description lagrangienne : description par les trajectoires	16
2.1.3	Description eulérienne : description par le champ de vitesse	16
2.1.4	Lignes de courant, filet de fluide, trajectoire de particules	17
2.1.5	Écoulement stationnaire	18
2.2	Dérivée particulaire	19
2.3	Bilans	19
2.3.1	Conservation de la masse	19
2.3.2	Bilan sur une surface mobile - Incompressibilité	21
2.4	Quelques classes d'écoulement	21
2.4.1	Écoulement plan	21
2.4.2	Écoulement potentiel	21
2.4.3	Écoulement irrotationnel	21
2.4.4	Écoulements plans stationnaires et incompresssibles	22
2.4.5	Écoulements plans stationnaires et irrotationnels	23
2.4.6	Écoulements plans stationnaires, incompressibles et irrotationnels	23
3	Dynamique des fluides parfaits	25
3.1	Contraintes dans un fluide	25
3.2	Équation d'Euler	26
3.2.1	Expression	26
3.2.2	Conditions aux limites	26
3.2.3	Un système complet d'équations et de conditions aux limites	28

3.3	Théorème de Bernoulli	28
3.3.1	Écoulement stationnaire	28
3.3.2	Écoulement irrotationnel	29
3.3.3	Interprétation	29
3.4	Une application : l'effet Magnus	30
3.5	Forces de trainée et de portance. Paradoxe de d'Alembert	32
4	Dynamique d'un fluide visqueux	35
4.1	Expérience avec un fluide réel	35
4.2	Force de viscosité	36
4.2.1	Notion de viscosité	36
4.2.2	Équivalent volumique	37
4.2.3	Diffusion de quantité de mouvement	38
4.2.4	Conditions aux limites	38
4.2.5	Équation de Navier-Stokes	38
4.3	Écoulements réels. Nombre de Reynolds	39
4.3.1	Écoulements laminaires et turbulents	39
4.3.2	Interprétations du nombre de Reynolds	40
4.4	Analogie hydro-électrique	41
4.5	Écoulements rampants - Équation de Stokes	42
4.5.1	Écoulements à très faible Reynolds	42
4.5.2	Écoulement en milieu poreux. Loi de Darcy	42
4.6	Écoulement autour d'un obstacle	44
4.6.1	Force de trainée	44
4.6.2	Couche limite	44
4.6.3	L'approximation de la couche limite	45
4.6.4	Décollement et influence sur la trainée	46
5	Bilans dans les fluides	49
5.1	Bilan de quantité de mouvement	49
5.2	Bilan de moment cinétique et d'énergie cinétique	49
5.2.1	Théorème du moment cinétique	49
5.2.2	Théorème de l'énergie cinétique	49
5.3	Bilan d'enthalpie et d'entropie	49
5.3.1	Situation de travail	49
5.3.2	Bilan enthalpique	50
6	Capillarité	51
6.1	Effets de surface et tension superficielle	51
6.1.1	Mise en évidence expérimentale	51
6.1.2	Définition de la tension superficielle	52
6.1.3	Origine physique	52
6.1.4	Lien avec la mécanique et avec la thermodynamique	52
6.2	Interface entre deux fluides	54
6.2.1	Loi de Laplace	54
6.2.2	Film liquide – bulles de savon	55
6.3	Interface triple – mouillage	56
6.3.1	Ligne triple - loi de Young-Dupré	56
6.3.2	Mesure de tension de surface : tensiométrie par arrachement	58
6.4	Compétition entre capillarité et pesanteur	58

6.4.1	Longueur capillaire	58
6.4.2	Forme des gouttes larges en mouillage partiel	59
6.4.3	Autres manifestations de la longueur capillaire	60
A	Formulaire mathématique	61
A.1	Théorème de Green-Ostrogradski	61
A.2	Théorème de Stokes	61
A.3	Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques	61
A.4	Analyse vectorielle en coordonnées sphériques	62
A.5	Relations vectorielles utiles	62
B	Dynamique en coordonnées cylindriques et sphériques	63
B.1	Coordonnées cylindriques	63
B.1.1	Notations (r, θ, x)	63
B.1.2	Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible	63
B.1.3	Équation de Navier-Stokes	63
B.2	Coordonnées sphériques	64
B.2.1	Notations (r, φ, θ)	64
B.2.2	Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible	64
B.2.3	Équation de Navier-Stokes	64
C	Résultats utiles	65
C.1	Potentiels des vitesses et fonctions de courant d'écoulements plans	65
C.2	Relation fonction de courant - composantes des vitesses	66
C.3	Relation potentiel des vitesses - composantes des vitesses	66

Chapitre 1

Le modèle du fluide. Éléments d'hydrostatique

1.1 Le modèle du fluide

1.1.1 Notion de fluide

Un fluide est un **système composé de nombreuses particules libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres**. Cette propriété distingue nettement les fluides des solides pour lesquels les différentes parties constitutives (atomes, molécules ou ions) sont rigidement liés les unes aux autres.

Dans un liquide comme dans un gaz, le mouvement des molécules est désordonné : c'est l'agitation thermique. D'un point de vue quantitatif, on relève les différences suivantes :

- Dans un liquide, les distances intermoléculaires sont de l'ordre de grandeur des dimensions moléculaires, alors que dans un gaz, elles sont beaucoup plus grandes. Les forces d'interaction entre molécules (forces de Van der Waals en $1/r^7$) jouent un rôle beaucoup plus important dans les liquides que dans les gaz.
- Aux pressions usuelles, la densité particulière des liquides est de l'ordre de 1000 fois celle des gaz.
- Le coefficient de compressibilité χ d'un gaz est très supérieur à celui d'un liquide : dans la plupart des problèmes, les liquides pourront être considérés comme incompressibles.

Considérons deux cas : l'eau liquide et l'air pris dans les conditions usuelles ($P \simeq 10^5$ Pa et $T \simeq 300$ K). Calculons dans chaque cas le nombre de molécules contenues dans un volume V_0 petit à l'échelle macroscopique : $V_0 = 1 \text{ mm}^3$.

- Dans le cas de l'eau, la masse molaire est $M_1 = 18 \text{ g/mol}$ et la masse volumique $\rho \simeq 1 \text{ g/cm}^3$. Le volume molaire est donc de $\mathcal{V}_1 = M_1/\rho = 18 \text{ cm}^3/\text{mol}$. Le nombre N_1 de molécules contenues dans V_0 vaut donc : $N_1 = \mathcal{N} \frac{V_0}{\mathcal{V}_1}$, avec $\mathcal{N} = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ le nombre d'Avogadro, soit $N_1 = 3.34 \cdot 10^{19}$ molécules.

La distance typique entre molécules vaut $d_1 = \left(\frac{V_0}{N_1}\right)^{1/3}$, soit $d_1 \simeq 0.3 \text{ nm}$.

- Dans le cas de l'air, assimilé à un gaz parfait, le volume molaire vaut $\mathcal{V}_2 = \frac{\mathcal{R}T}{P} = 0.025 \text{ m}^3/\text{mol}$. Le nombre N_2 de molécules contenues dans V_0 vaut donc : $N_2 = \mathcal{N} \frac{V_0}{\mathcal{V}_2}$, soit $N_2 = 2.41 \cdot 10^{16}$ molécules.

La distance typique entre molécules vaut $d_2 = \left(\frac{V_0}{N_2}\right)^{1/3}$, soit $d_2 \sim 3 \text{ nm}$.

1.1.2 Notion de particule fluide

Dans les deux cas, le nombre de molécules contenues dans un volume petit à l'échelle macroscopique est très important. Il est hors de question de décrire le comportement de chaque molécule. On adoptera donc

une description macroscopique ayant un caractère statistique et portant sur des grandeurs moyennées sur des petits volumes. Le problème est de savoir quelle taille il faut prendre pour le volume. Si on trace des grandeurs comme la température ou la densité par rapport à l'échelle considérée on peut distinguer 3 différents régimes :

- Pour des échelles inférieures au libre particule moyen L_1 on observe des fluctuations importantes,
- Pour des échelles intermédiaires on a des grandeurs constantes,
- Pour des échelles trop grandes supérieures à une échelle L_2 , qui correspond à une longueur caractéristique du système, on observe à nouveau des fluctuations lente.

Il faut donc se placer entre L_1 et L_2 pour avoir des grandeurs constantes.



Les moyennes sont effectuées sur un élément de fluide, nommé **particule fluide**, volume suffisamment petit à l'échelle macroscopique pour permettre une description fine du fluide, mais grand par rapport aux dimensions moléculaires. C'est l'échelle dite **mésoscopique**, ici de l'ordre du micromètre.

Ainsi, la vitesse d'écoulement du fluide correspond à la vitesse moyenne des molécules composant ce fluide, c'est-à-dire à une vitesse d'ensemble à laquelle se superpose l'agitation thermique. Nous supposons que les théorèmes généraux de la dynamique s'appliquent aux grandeurs moyennes correspondant à une particule fluide. En d'autres termes, nous supposons que si une particule fluide donnée, de masse dm , possède dans le référentiel du laboratoire une accélération $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, on peut écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (1.1)$$

où $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur l'élément de fluide en question.

1.2 Notion de Pression

1.2.1 La pression au sein d'un fluide au repos

Les chocs des molécules sur les parois fixes d'un récipient se traduisent, à l'échelle macroscopique, par une force liée à la variation de quantité de mouvement des molécules ayant frappées la paroi pendant un temps donné. Pour un élément de paroi de surface dS , le nombre de chocs est proportionnel à dS . Par symétrie, dans un fluide au repos, la force $d\mathbf{F}$ est normale à dS . On écrira donc pour un élément de surface dS :

$$d\mathbf{F} = P dS \mathbf{n}, \quad (1.2)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à la paroi dirigé du fluide vers l'extérieur du récipient.



La grandeur P est la **pression**, son unité associée le **Pascal** (Pa).

Notons que d'après le principe des actions réciproques, l'élément de surface dS exerce sur le fluide la force opposée $-d\mathbf{F}$. Par ailleurs, la force de pression ne se limite pas au contact du fluide et des parois du récipient qui le contient mais permet de décrire les actions internes au fluide, au moins dans le cas d'un fluide au repos. Enfin, on peut montrer expérimentalement et théoriquement que la pression en un point du fluide ne dépend pas de l'orientation de l'élément de surface $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$.



Dans le cas où le fluide est en mouvement, l'argument de symétrie ne tient plus pour démontrer que la force de pression est normale à la paroi. L'expérience montre que pour décrire les forces exercées l'une sur l'autre par deux parties d'une fluide séparés par une surface, il faut ajouter des composantes tangentielles qui correspondent au phénomène de viscosité. Ceci sera abordé plus tard.

Notons qu'a priori, tout fluide est compressible, mais certains le sont très peu, comme les liquides. Ainsi, lorsque ρ ne varie que très faiblement avec P , on pourra considérer la masse volumique comme constante. C'est le modèle du fluide incompressible. Ceci n'est pas le cas pour les gaz, dont la masse volumique dépend fortement de la pression, sauf dans de rares cas (les régimes des vents par exemple). On montrera par la suite que l'approximation de l'écoulement incompressible est justifiée lorsque la vitesse de déplacement du fluide est très inférieure à la vitesse du son se propageant dans ce même fluide. On définit pour cela le nombre de Mach comme $Ma = \frac{v}{c_s}$ où v désigne la vitesse du fluide et c_s la vitesse du son dans ce même fluide. En première approximation, l'incompressibilité se traduit par une condition portant sur le nombre de Mach $Ma \ll 1$.

Dans l'eau, $c_s \simeq 1500$ m/s alors que dans l'air $c_s \simeq 340$ m/s. L'écoulement autour d'un poisson peut donc légitimement être considéré comme incompressible, à l'inverse de celui autour d'un avion.

1.2.2 Équation d'état

Pour une masse donnée de fluide, il existe en général une équation liant la pression P , le volume V et la température T , équation que l'on peut écrire sous la forme

$$f(P, V, T) = 0 \quad (1.3)$$

et qui porte le nom d'*équation d'état*.

Dans ce cas, la masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$ apparaît comme une fonction de P et de T :

$$\rho = \rho(P, T). \quad (1.4)$$

La dépendance de V (donc de ρ) en fonction de T correspond à la **dilatation**. La dépendance de V (donc de ρ) en fonction de P correspond à la **compressibilité**.

1.3 Équilibre mécanique d'un fluide

1.3.1 Relation locale traduisant l'équilibre

Considérons un fluide en équilibre dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Chaque élément de fluide est donc en équilibre sous l'action des forces extérieures à cet élément, forces qui sont de deux types :

- les forces de contact, dues aux autres parties du fluide et qui s'expriment via la pression P ,
- les forces extérieures, dues aux champs de force dans lequel le fluide est plongé : champ de pesanteur, champ électrique ou magnétique...

Pour un volume $d\tau$ de fluide, ces forces extérieures sont liées aux forces volumiques (densité volumique de champ de force) par $d\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} d\tau$. Nous cherchons alors à exprimer la condition d'équilibre sur un élément de fluide compris dans le volume $d\tau = dx dy dz$. À l'équilibre, la somme des forces extérieures est nulle. Sur l'axe Ox , cette condition s'écrit

$$0 = dy dz P(x) - dy dz P(x + dx) + f_{\text{ext},x} dy dz dx \quad (1.5)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} dy dz dx + f_{\text{ext},x} dx dy dz \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

Et donc :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f_{\text{ext},x} \quad (1.8)$$

En écrivant les mêmes relations sur Oy et Oz , on obtient



$$\nabla P = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}}{d\tau} \quad (1.9)$$

1.3.2 Cas d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur

Considérons maintenant un fluide, considéré comme incompressible, en équilibre dans le champ de pesanteur $\mathbf{g}$, supposé uniforme. On a $d\mathbf{F}_{\text{ext}} = \rho \mathbf{g} d\tau$, où ρ désigne la masse volumique du fluide

Ainsi, la condition d'équilibre s'écrit



$$\nabla P = \rho \mathbf{g}. \quad (1.10)$$

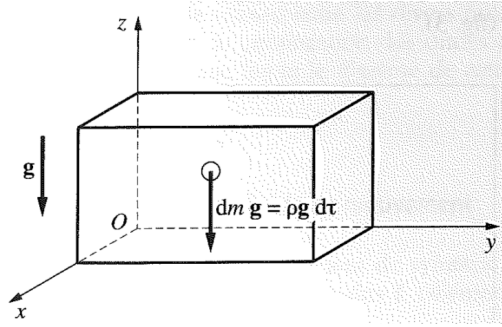


FIGURE 1.1 – Élément de fluide dans le champ de pesanteur.

Prenons l'axe Oz orienté suivant la verticale ascendante, comme représenté sur la FIGURE 1.1. La relation s'écrit alors

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (1.11)$$



Ainsi, P ne dépend que de z et la dernière relation s'intègre en $P = P_0 - \rho g z$, où P_0 est la pression à $z = 0$.

Si deux points A et B sont séparés d'une hauteur h , on a $P_B - P_A = -\rho g h$.

Pour l'eau, $\rho \simeq 1000 \text{ kg/m}^3$ et $g = 9.81 \sim 10 \text{ m/s}^2$. Ainsi, lorsqu'on descend d'une hauteur d'eau $h = 10 \text{ m}$, la pression augmente de $\Delta P \sim 10^5 \text{ Pa}$, soit 1 bar.

Remarque : on introduit souvent la pression statique, $p^* = P + \rho g z$.

1.3.3 Équilibre d'un fluide dans un référentiel non galiléen

Si l'on se place dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ (par opposition au référentiel de Copernic $\mathcal{R}$), il faut tenir compte des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Pour un élément de volume $d\tau$ de masse $dm = \rho d\tau$:

$$d\mathbf{f}_{\text{ie}} = -dm \mathbf{a}_e \quad \text{et} \quad d\mathbf{f}_{\text{ic}} = -2dm \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{v}_r \quad (1.12)$$

avec

$$\omega_e = \omega_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{v}(M/\mathcal{R}') \quad (1.13)$$

Dans ce cas, la relation d'équilibre s'écrit $\nabla P = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \rho(\mathbf{f}_{\text{ie}} + \mathbf{f}_{\text{ic}})$.

1.4 Poussée d'Archimède

1.4.1 Solide totalement immergé dans un fluide ; Théorème d'Archimède

Considérons un solide limité par une surface S et totalement immergé dans un fluide de masse volumique ρ . Calculons la résultante des forces s'exerçant sur ce solide :

$$\mathbf{F} = - \oint_S P \, d\mathbf{S} \quad \text{avec} \quad d\mathbf{S} = dS \, \mathbf{n}. \quad (1.14)$$

Le signe “-” vient du fait que le sens de la normale positive $\mathbf{n}$ est toujours pris suivant la normale sortante. Notons que la pression a la même expression dans les deux situations représentées sur la FIGURE 1.2 : dans le premier cas, le solide est totalement immergé dans le fluide. Dans le second, le volume du solide est totalement occupé par le fluide.

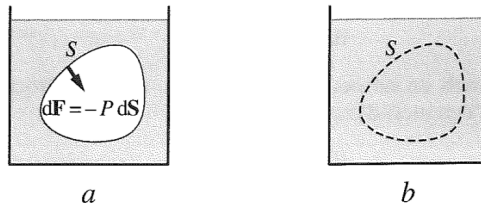


FIGURE 1.2 – a) Solide totalement immergé dans un fluide. b) Solide totalement remplacé par du fluide.

Calculons la composante de $\mathbf{F}$ selon Ox , F_x : $F_x = - \oint_S (P \mathbf{e}_x) \cdot d\mathbf{S}$. Le théorème de Green-Ostrogadsky (ou théorème de la divergence) donne

$$F_x = - \iiint_V \nabla \cdot (P \mathbf{e}_x) \, d\tau \quad (1.15)$$

$$= - \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} \, d\tau \quad (1.16)$$

En écrivant la même chose pour les composantes F_y et F_z , on obtient

$$\mathbf{F}_a = - \iiint_V \nabla P \, d\tau \quad (1.17)$$

$$= - \iiint_V \rho \mathbf{g} \, d\tau \quad (1.18)$$

$$= -m_f \mathbf{g} \quad (1.19)$$

en utilisant l'équation (1.10) en notant $m_f = \iiint_V \rho \, d\tau$ la masse du fluide déplacé par le solide.



Théorème d'Archimède : La résultante des forces de pression exercées sur un corps totalement immergé dans un fluide est l'opposé du poids du fluide déplacé : $\mathbf{F}_a = -m_f \mathbf{g}$.

1.4.2 Remarque dans le cas de deux fluides différents. Notion de centre de poussée

Le cas classique d'application du théorème d'Archimède est celui du navire, immergé dans deux fluides de masse volumiques différentes (FIGURE 1.3).

Le problème qui se pose ici est celui du point d'application de la force d'Archimède. On peut montrer que l'ensemble des forces de pression est équivalente à une force opposée au poids total des fluides déplacés et appliquée au barycentre de masse G' de l'ensemble de ces fluides déplacés. On notera que G' n'est pas confondu avec G , le centre de masse du navire et qu'il n'est pas un point fixe du navire. Ceci peut conduire à des problèmes de stabilité.

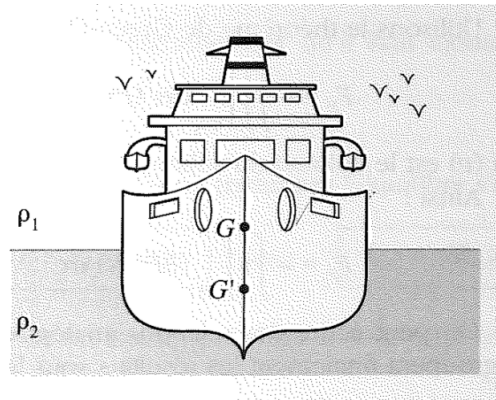


FIGURE 1.3 – Navire plongé dans deux fluides différents.

Chapitre 2

Cinématique des fluides

On s'attache ici à la description analytique d'un fluide en mouvement, sans prendre en compte les forces qui sont à leur source. Un milieu fluide étant en mouvement, on se demandera comment l'observer ou comment le décrire. On utilisera la notion de *particule fluide* définie au chapitre précédent. À cette particule fluide, on attachera des grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) et des grandeurs thermodynamiques (masse volumique, température, pression...).

2.1 Description du mouvement

2.1.1 Grandeurs cinématiques attachées à une particule fluide

On considère une particule fluide et on la suit dans son mouvement par rapport au repère (O, x, y, z) . Le temps est noté t . Une particule M est en mouvement par rapport à ce repère. À l'instant t_0 , la particule fluide occupe la position $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. À un instant t quelconque, la particule fluide occupe la position $\mathbf{x}(t) = (x, y, z)$. Nous écrivons que la position, à l'instant t , de la particule fluide qui occupait la position $\mathbf{x}_0$ à l'instant t_0 , est donnée par : $\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$. La fonction $\mathbf{F}$ est supposée continue et continument dérivable autant de fois que nécessaire. Elle est bijective, si bien que : $\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t_0, t)$.

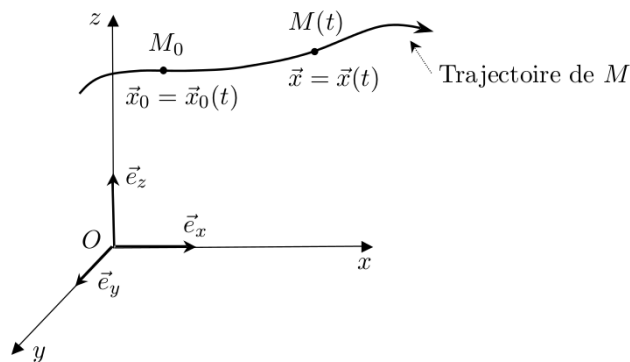


FIGURE 2.1 – Positions successives d'une particule fluide.

À chaque instant t , on peut définir, en tout point de l'espace, un vecteur $\mathbf{v}_L$ qui représente la vitesse de la particule fluide qui occupait la position $\mathbf{x}_0$ à l'instant t_0 . Cette vitesse est donnée par :

$$\mathbf{v}_L = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0, t) \quad (2.1)$$

De même, on peut définir son accélération par

$$\mathbf{a}_L = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2}(\mathbf{x}_0, t_0, t). \quad (2.2)$$

2.1.2 Description lagrangienne : description par les trajectoires

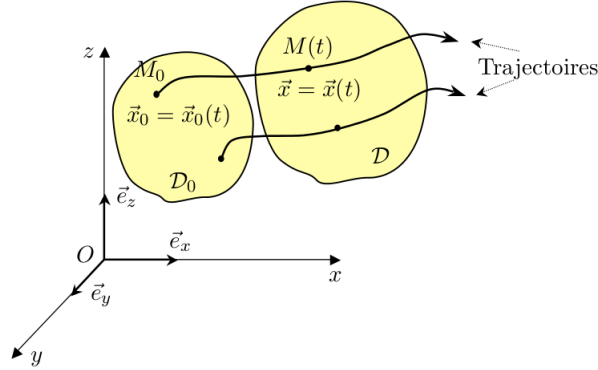


FIGURE 2.2 – Description Lagrangienne d’un fluide avec les trajectoires de chaque particule de fluide.



La description **lagrangienne** consiste à suivre une particule fluide au cours du temps que l’on repère par sa position initiale.

Soit à l’instant t_0 , un domaine D_0 de fluide. Considérons une particule quelconque M_0 de D_0 et sa trajectoire. A l’instant t , cette particule occupe la position M et l’ensemble de toutes les particules de D_0 occupent le volume D (FIGURE 2.2). On peut dire que la connaissance de toutes les trajectoires donne une description complète du mouvement. Remarquons que la détermination des trajectoires revient, en pratique, à déterminer la fonction $\mathbf{F}$ introduite dans la relation (2.1), en intégrant temporellement le champ de vitesse lagrangien par exemple :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t') dt' \quad (2.3)$$

Une technique de visualisation des trajectoires consiste à marquer une particule fluide par l’utilisation d’un traceur coloré, dans le cas d’un liquide, ou de fumée, dans le cas d’un gaz, et ensuite de suivre l’évolution de sa position au cours du temps.

EXEMPLE : Au bord d’une rivière, un pêcheur à la ligne regardant dériver au fil du courant des feuilles qui flottent à la surface de l’eau, se place implicitement dans la conception Lagrangienne, lorsqu’il suit des yeux le mouvement de ces particules avec l’eau de la rivière.

2.1.3 Description eulérienne : description par le champ de vitesse

Dans la pratique, il est difficile d’identifier, et donc de suivre, une particule fluide en mouvement. Il apparaît donc judicieux d’introduire une description alternative pour un écoulement.



La description **eulérienne** consiste à s’intéresser à la vitesse d’une particule fluide qui coïncide à l’instant t avec un point fixe M de vecteur position $\mathbf{x}$ que l’on peut noter $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t)$.

À chaque instant, si le fluide est en mouvement, on observe la vitesse d'une particule fluide différente. Afin de retrouver les positions d'une particule, il suffit, même si ce n'est pas toujours facile, d'intégrer l'équation : $d\mathbf{x} = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t)dt$

Pour passer d'une représentation à l'autre, on a les relations entre les vitesses

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_E(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t_0, t), t) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_L(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t_0, t), t) \quad (2.5)$$

On peut dire que la connaissance de toutes les vitesses $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t)$ des particules fluides passant en $\mathbf{x}$ à l'instant t donne une description complète du mouvement.

EXEMPLE : Le pêcheur observe cette fois les remous proche d'un rocher. Il ne s'intéresse plus à une particule fluide qu'il suit dans son mouvement mais à un point particulier de la rivière où transigent en permanence de nouvelles particules fluide. Il observe la vitesse de ces particules en un point fixe de l'espace et du temps.



Dans le domaine de la mécanique, les deux descriptions sont utilisées. En mécanique des solides, c'est la description de Lagrange qui est prioritairement utilisée. En revanche, en mécanique des fluides, c'est la description d'Euler qui est prioritairement utilisée. Un exemple de l'utilisation des deux descriptions est la circulation des voitures sur une route. Alors que Bison futé utilise la description d'Euler pour donner la vitesse de "l'écoulement des voitures", le gendarme utilise la description de Lagrange pour viser une voiture particulière afin d'apprécier son excès de vitesse.

2.1.4 Lignes de courant, filet de fluide, trajectoire de particules



On définit une **trajectoire** comme l'ensemble des positions $\mathbf{x}$ successives d'une particule fluide au cours du temps. On obtient la trajectoire par intégration temporelle du champ de vitesse lagrangien :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t') dt' \quad (2.6)$$

Ainsi un ensemble de vecteurs de vitesse lagrangienne définit la **trajectoire** d'une particule.



En description eulérienne on utilise **les lignes de courant** (ou de champ) qui est l'ensemble des vecteurs vitesses à un instant donnée.

On note la vitesse $\mathbf{v} = (u, v, w)$ (dans toute la suite, on omettra l'indice $_E$ qui désigne les champs eulériens). On peut traduire le fait que le vecteur vitesse est parallèle à la ligne de courant par l'équation :

$$d\mathbf{M} \wedge \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2.7)$$

où $d\mathbf{M} = (dx, dy, dz)$ est un élément de longueur sur la ligne de courant.

Expérimentalement, si on trace les trajectoires pendant un temps assez court, on aura une sorte des champs de vecteurs (champ de petites lignes) et ainsi visualiser les lignes de courant.



Une autre manière de voir les choses est le **filet de fluide** qui représente l'ensemble des positions successives d'une particule de fluide ayant coïncidé à un instant antérieur avec un point $\mathbf{x}_0$.

Expérimentalement cela consiste à injecter un colorant dans le fluide à débit constant et de visualiser le colorant qu'on appelle filet de fluide.



Lorsqu'un écoulement n'est pas stationnaire, ces notions sont différentes, comme illustré sur la FIGURE 2.3.

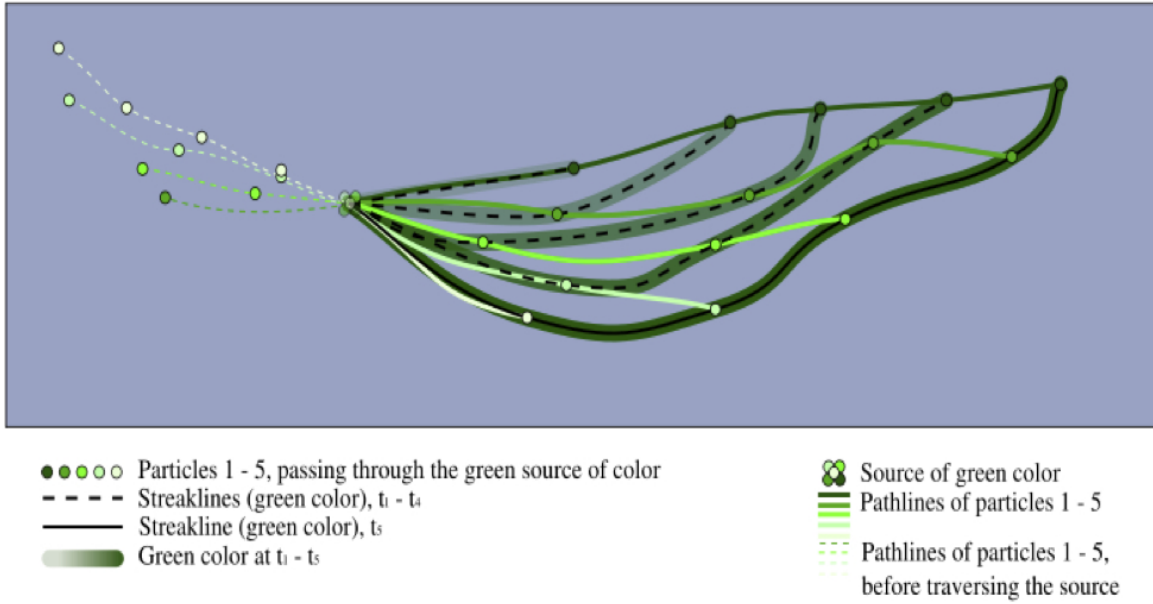


FIGURE 2.3 – Illustration des 3 différentes lignes dans un cas d'écoulement non-stationnaire. Streakline = filet fluide, Pathline = ligne de courant.

2.1.5 Écoulement stationnaire



Un écoulement est dit **stationnaire** (ou encore **permanent**), si la vitesse eulérienne ne dépend pas explicitement du temps t . Autrement dit : $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Ainsi la dérivée par rapport au temps est systématiquement nulle.

Dans ce cas, on a $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t_1) = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t_2)$ pour tout t_1 et t_2 . À un même instant, tous les vecteurs vitesses tangents à une trajectoire n'évoluent pas dans le temps et une trajectoire sera donc équivalente à ligne de courant. De plus, pour un point fixe $\mathbf{x}_0$, les particules qui passent par ce point auront les mêmes vecteurs vitesses dans l'espace quelque soit l'instant, donc les lignes de courant sont confondues avec les filets de fluide.

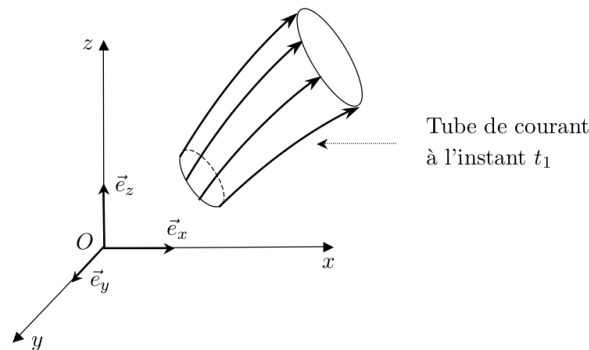


FIGURE 2.4 – Représentation d'un tube de champ (ou de courant).



On définit un **tube de champ** (ou de courant) comme un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé (FIGURE 2.4).

2.2 Dérivée particulière

En mécanique du point, on dérive simplement la position par rapport au temps pour obtenir la vitesse en un point. En description eulérienne, une particule de fluide peut changer de quantité de mouvement :

- soit parce que le champ de vitesse dépend du temps : $\mathbf{v}(t)$,
- soit parce qu'elle se déplace dans une région où la quantité de mouvement n'est pas uniforme.

Prenons une grandeur scalaire f . On peut calculer sa variation :

$$\delta f = \frac{\delta f}{\delta t} \delta t + \frac{\delta f}{\delta x} \delta x + \frac{\delta f}{\delta y} \delta y + \frac{\delta f}{\delta z} \delta z \quad (2.8)$$

Où le premier terme est dû à la dépendance temporelle et les autres termes sont dus au déplacement de la particule dans le fluide. Et donc :

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta t} \quad (2.9)$$

On obtient donc

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (2.10)$$



On note $\frac{Df}{Dt}$ la **dérivée particulière** de la grandeur f pour ne pas la confondre avec la dérivée partielle par rapport au temps $\frac{\partial f}{\partial t}$. Elle est composée

- d'un terme de **dérivée temporelle**, dû à la dépendance temporelle.
- d'un terme de **dérivée convective**, dû au déplacement de la particule dans le fluide :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

Pour une grandeur vectorielle $\mathbf{A}$, on aura de façon analogue :

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} \quad (2.11)$$

En particulier, pour la vitesse $\mathbf{v}$, l'accélération particulière s'exprime par

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.12)$$

2.3 Bilans

2.3.1 Conservation de la masse

Considérons un volume V fixe, limité par une surface S , arbitrairement définie au sein d'un fluide en mouvement. La masse totale M contenue à l'instant t dans V est

$$M(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{x}, t) d\tau \quad (2.13)$$

et dépend a priori du temps. Une variation temporelle de la masse volumique ρ se traduit par une variation de la masse totale. Ainsi, le volume V étant fixe, c'est-à-dire indépendant du temps, on a

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau. \quad (2.14)$$

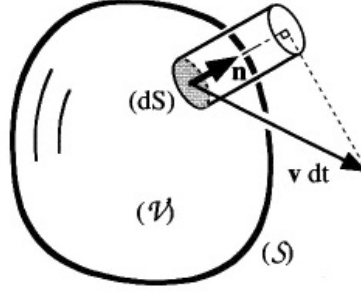


FIGURE 2.5 – Bilan de masse de fluide à l'intérieur d'un volume fixe V . Le vecteur normal unitaire $\mathbf{n}$ est dirigé vers l'extérieur. Le flux de masse entrant par unité de temps est égale à $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$.

La masse d'un système se conservant, une variation de la masse totale M correspond nécessairement à un transport de matière à travers S , c'est-à-dire à un flux de matière. Considérons un élément de surface $d\mathbf{S}$ (cf FIGURE 2.5) orienté selon $\mathbf{n}$, un vecteur unitaire orienté vers l'extérieur. La quantité de masse qui passe à travers cet élément de surface est $d^2m = \rho dS dh = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} dt$.

En écrivant que la masse est conservée dans le volume V , c'est-à-dire : "variation de masse" = "débit massique entrant" ou encore "variation de masse" + "débit massique sortant" = 0, on obtient

$$\iiint_V \frac{d\rho}{dt} d\tau + \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.15)$$



Le signe "+" ou "-" du débit massique est lié à une convention : on définit $d\mathbf{S}$ sortant par rapport à la surface.

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on transforme l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\tau = 0. \quad (2.16)$$



Cette équation étant valable pour tout volume V , on obtient l'équation locale de la **conservation de masse** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.17)$$

Par analyse vectorielle, on a $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot (\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$. De plus, on sait que $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$. On a donc une autre expression de la conservation locale de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.18)$$

On définit habituellement le **débit massique** (ou flux massique) à travers la surface S comme

$$Q_m(\rho) = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.19)$$



De façon analogue, on définit le **débit volumique** (ou flux volumique) à travers la surface S comme

$$Q_v(\rho) = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.20)$$

Il s'agit de flux sortants, la normale étant orientée vers l'extérieur.

On définit également la **densité volumique** de courant de masse par $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$.

2.3.2 Bilan sur une surface mobile - Incompressibilité

Nous avons effectué le bilan précédent sur un volume fixe dans l'espace, c'est-à-dire un volume au travers duquel le fluide s'écoule. Il est possible de faire un bilan sur un volume mobile, en particulier un volume qui suivrait le fluide en mouvement. On peut étudier un volume $\mathcal{D}$, de surface frontière $\mathcal{S}(t)$ que l'on suit dans son mouvement. On s'intéresse à une quantité volumique $k(\mathbf{x}, t)$, telle que

$$K(t) = \iiint_{\mathcal{D}} k(\mathbf{x}, t) d\tau \quad (2.21)$$

On peut montrer dans ce cas, en faisant un bilan, qu'on a :

$$\frac{DK}{Dt} = \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (k\mathbf{v}) \right) d\tau = 0 \quad (2.22)$$

Ainsi, pour $k = 1$, on obtient

$$\frac{DV}{Dt} = \iiint_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = 0, \quad (2.23)$$

où V désigne le volume contenu dans $\mathcal{D}$.



Un écoulement est dit **incompressible** (ou isovolume) si et seulement si le volume de $\mathcal{D}(t)$ est constant, ou encore si et seulement si : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.



Remarque sur la terminologie *incompressible* :

- Fluide incompressible : la masse volumique ρ est constante,
- Écoulement incompressible : on a $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Ainsi, d'après la loi de la conservation de la masse, équation (2.17), si le fluide est incompressible alors l'écoulement est incompressible. Cependant, la réciproque est fautive : il existe des écoulements incompressibles de fluides compressibles.

2.4 Quelques classes d'écoulement

2.4.1 Écoulement plan

Lorsque la vitesse $\mathbf{v}$ de l'écoulement ne dépend que de 2 coordonnées et est invariant selon la troisième Oz , on parle d'écoulement plan : on a $\mathbf{v} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$. En tout point d'une même droite parallèle à l'axe Oz , passant par le point de coordonnées $(x, y, z = 0)$, on a le même vecteur vitesse $\mathbf{v}$. Ceci signifie que dans tous les plans $z = cste$, on a le même écoulement.

2.4.2 Écoulement potentiel



Un écoulement dans lequel il existe une fonction $\phi(\mathbf{x}, t)$ tel que $\mathbf{v} = \nabla \phi$ est appelé **écoulement potentiel**. La fonction $\phi(\mathbf{x}, t)$ est le potentiel des vitesses.

2.4.3 Écoulement irrotationnel



Un écoulement qui vérifie $\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ est appelé **écoulement irrotationnel**. Il est immédiat qu'un écoulement potentiel est irrotationnel car $\nabla \wedge \nabla f = 0$ pour tout f . La réciproque est aussi vraie.

2.4.4 Écoulements plans stationnaires et incompressibles

Le champ de vitesse est de la forme $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$ et vérifie

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.24)$$

On introduit alors une fonction de courant ψ telle que :



$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.25)$$

La fonction de courant permet de ramener l'étude du champ de vitesse à un champ scalaire.

En coordonnées cylindriques, on définit ψ par $\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$.

On a bien

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.26)$$

Cette fonction est définie à une constante près, qui nous importe peu. Elle a une signification physique intéressante, puisqu'elle est invariante le long des lignes de courant. En effet on a :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy \quad (2.27)$$

Or le long des lignes de courant, on a, par définition, $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$. D'où $d\psi_{dc} = 0$ comme représenté sur la FIGURE 2.6.



Les lignes de courant sont des lignes d'iso- ψ .

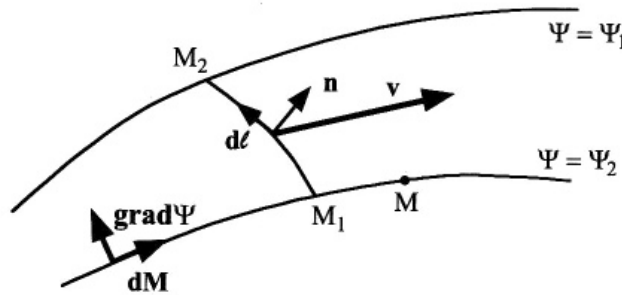


FIGURE 2.6 – Les lignes de courant d'un écoulement bidimensionnel incompressible (tangente en chaque point au vecteur vitesse) sont confondues avec les lignes suivant lesquelles la fonction de courant ψ est constante.

Dans le cas d'un écoulement plan, la quantité $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ représente le débit volumique Q_v de fluide dans le tube de courant de section rectangulaire compris entre les lignes de courant ψ_1 et ψ_2 et d'épaisseur unité dans la direction Oz .

2.4.5 Écoulements plans stationnaires et irrotationnels

Le champ de vitesse est de la forme $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$ et vérifie

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

Alors, il existe un potentiel des vitesses $\phi(\mathbf{x}, t)$ tel que $\mathbf{v} = \nabla \phi$. On a bien

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.29)$$

2.4.6 Écoulements plans stationnaires, incompressibles et irrotationnels

Dans ce cas, on montre facilement que le potentiel des vitesses et la fonction de courant vérifient

$$\Delta \phi = \Delta \psi = 0 \quad (2.30)$$

Chapitre 3

Dynamique des fluides parfaits

Dans ce chapitre, nous nous proposons de traiter de la dynamique des fluides, c'est-à-dire de considérer les mouvements et les efforts qui conduisent à ces mouvements. Dans ce chapitre, nous nous limitons aux efforts de pression et le fluide est dit fluide parfait. Dans le chapitre suivant, nous envisageons d'autres types d'efforts intérieurs et nous introduisons la notion de fluide visqueux.

3.1 Contraintes dans un fluide

Dans un fluide, deux types de forces existent :

- les forces volumiques : gravitation, électromagnétisme... Dans la suite, on notera $\mathbf{f}_v$ la densité volumique de force de volume (*bulk* en anglais),
- les forces surfaciques : pression et viscosité.



Pour les forces volumiques, écrivons la force qui s'applique au volume élémentaire $d\tau$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{f}_v d\tau$$

Ainsi, au champ de pesanteur $\mathbf{g}$, on associe la densité volumique de force $\mathbf{f}_v = \rho\mathbf{g}$.

On peut également introduire une densité massique de force volumique $\mathbf{f}_m$, qui vérifie $d\mathbf{f} = \mathbf{f}_m dm = \mathbf{f}_m \rho d\tau$. Les densités volumique et massique sont alors liées par : $\mathbf{f}_v = \rho \mathbf{f}_m$

Pour modéliser les forces surfaciques, on peut définir un tenseur des contraintes σ_{ij} que l'on définit tel que σ_{xy} est la contrainte qui s'exerce dans la direction Ox sur la surface perpendiculaire à Oy , et de même pour les autres composantes et autres repères orthonormés. Un exemple est donné sur la FIGURE 3.1.

On peut montrer que la contrainte σ_n (force par unité de surface) exercée sur une surface dS de normale $\mathbf{n}$, vaut

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS_n} = \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{soit} \quad dF_i = \sigma_{ij} dS_j \quad (3.1)$$

Dans un fluide, la composante normale de cette force est liée à la pression : $d\mathbf{F} = -Pd\mathbf{S}$. La composante tangentielle est liée aux forces de viscosité (ou de cisaillement) et ne seront abordées que dans le chapitre suivant.

En reprenant le raisonnement effectué au chapitre précédent, on voit que la résultante des forces de pression qui s'appliquent à un volume $d\tau$ de fluide vaut $d\mathbf{F} = -\nabla P d\tau$.

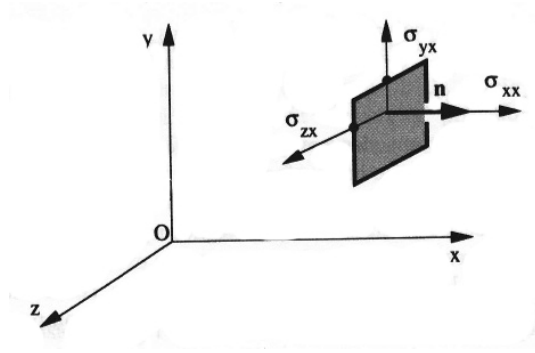


FIGURE 3.1 – Composantes σ_{xx} , σ_{xy} et σ_{xz} de la contrainte exercée sur une surface dont la normale est orienté suivant Ox



Ainsi, les équivalents volumique et massique des forces de pression, d'origine surfacique, s'expriment selon :

$$\mathbf{f}_v = -\nabla P \quad (3.2)$$

$$\mathbf{f}_m = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3.3)$$

3.2 Équation d'Euler



Un *fluide parfait* est un fluide dans lequel les efforts internes sont uniquement normaux. Cela revient donc à considérer un fluide sans viscosité. Il ne faudra pas confondre avec un écoulement parfait où les forces de viscosité sont négligeables.

En réalité il n'existe que très peu de fluides parfaits. L'hélium 4 est superfluide à très basse température (< 2.17 K) par exemple. Il s'agit donc d'une limite qu'on prend pour des fluides peu visqueux comme l'air ou l'eau. L'équation régissant ces fluides est l'équation d'Euler.

3.2.1 Expression

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule de fluide de masse dm , dont nous suivons le mouvement, s'écrit $dm \frac{D\mathbf{v}}{dt} = d\mathbf{F} = \mathbf{f}_{m,tot} dm$.



En explicitant les différents termes, on obtient

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mathbf{f}_v' \quad (3.4)$$

avec $\mathbf{f}_v'$ comprenant les autres forces volumiques que les forces de pression.

3.2.2 Conditions aux limites

Paroi solide

Le fluide parfait est en mouvement le long d'une paroi solide (FIGURE 3.2(a)) au repos. On note $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à la paroi au point M et dirigé vers le fluide et $\mathbf{v}$ le vecteur vitesse du fluide au point M .

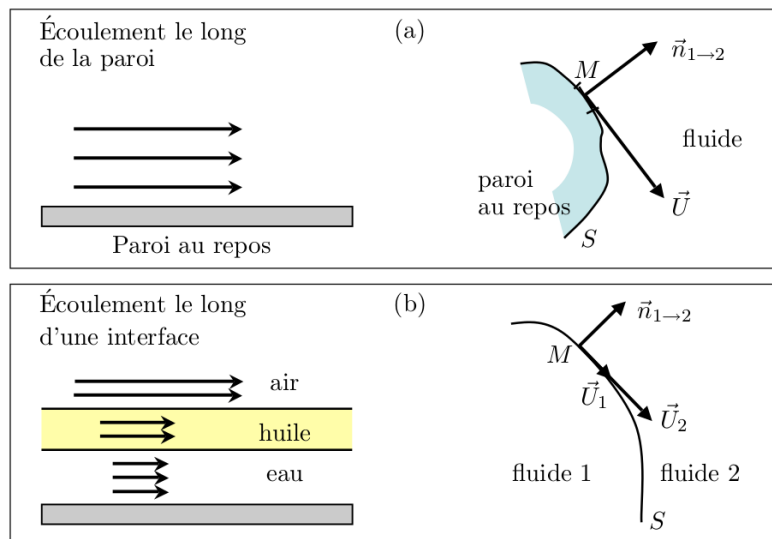


FIGURE 3.2 – Conditions aux limites

Le fluide ne peut pas pénétrer dans le solide mais il peut glisser sur la paroi :



$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.5)$$

Cette relation signifie que le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ est parallèle à la paroi mais que rien n'est imposé sur la vitesse tangentielle au niveau de la paroi.

Par ailleurs, puisque le fluide est supposé parfait, il n'y a pas de frottement entre le fluide et la paroi. Remarquons, que si la paroi possède la vitesse $\mathbf{w}$, alors la condition s'écrit $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = 0$. Concernant la pression du fluide à la paroi, nous admettons que la propriété établie en statique des fluides est encore vérifiée, à savoir que la force exercée par la paroi sur le fluide, en tout point de la paroi, est normale à la paroi, dirigée vers le fluide et de module égal à la pression P du fluide.

Interface fluide

Soit maintenant deux fluides parfaits en mouvement séparés par une surface S (appelée interface, FIGURE 3.2(b)). Notons 1 et 2 les deux fluides, M un point de S et $\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire, normal à S en M et dirigé de 1 vers 2. Les vitesses en M des fluides 1 et 2 sont notées respectivement $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

Les fluides ne peuvent s'interpénétrer :



$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (3.7)$$

Par ailleurs on a égalité des pressions à l'interface.

3.2.3 Un système complet d'équations et de conditions aux limites

Cas d'un fluide incompressible

L'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.8)$$

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mathbf{f}_v \quad (3.9)$$

Ici, ρ est constant. On a quatre équations scalaires pour les quatre inconnues (u, v, w) et P , fonctions des quatre variables d'Euler x, y, z et t . On adjoint à ce système d'équations, sur les bords du domaine limitant le fluide, les conditions aux limites décrites dans le paragraphe précédent. On peut être amené également à devoir écrire des conditions à l'infini si le fluide vient de l'infini (ou va à l'infini).

Cas d'un fluide compressible

Dans ce cas, ρ n'est pas constant et est nouvelle variable. Dans ce cas, il manque une équation, qui sera obtenue en écrivant le premier principe de la thermodynamique. À l'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler, on peut ajouter une équation liant par exemple pression et température. Cela dépendra du système étudié.

3.3 Théorème de Bernoulli

3.3.1 Écoulement stationnaire

Considérons un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible dans le champ de la pesanteur (axe vertical Oz dirigé vers le haut). L'équation d'Euler avec la seule force extérieure du champ de pesanteur s'écrit :

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g}. \quad (3.10)$$

En la multipliant scalairement par $\mathbf{v}$, on obtient :

$$\rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \nabla P + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad (3.11)$$

Avec l'analyse vectorielle on peut montrer que premier terme peut se ré-écrire comme $\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v}^2 \rho / 2)$ en supposant que ρ est constant, c'est-à-dire que le fluide est incompressible.

Le troisième terme se ré-écrit facilement comme $-\mathbf{v} \cdot \nabla (\rho g z)$.

On obtient alors

$$0 = \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla P + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho g z) \quad (3.12)$$

$$0 = \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + P + \rho g z \right) \quad (3.13)$$

Si on intègre la relation obtenue, le long d'une ligne courant ($\mathbf{v}$ parallèle à $d\mathbf{l}$) entre les points A et B , on obtient

$$\frac{\rho \mathbf{v}_A^2}{2} + P_A + \rho g z_A = \frac{\rho \mathbf{v}_B^2}{2} + P_B + \rho g z_B. \quad (3.14)$$



Pour un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible dans le champ de la pesanteur, le **théorème de Bernoulli** établit que sur chaque ligne de courant (ou trajectoire) on a :

$$\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = cste \quad (3.15)$$

3.3.2 Écoulement irrotationnel

Considérons maintenant un écoulement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible dans le champ de la pesanteur. Ré-utilisons la propriété établie dans le chapitre précédent (valable dans le cas tri-dimensionnel) : pour un écoulement irrotationnel, on peut définir un potentiel ϕ tel que $\mathbf{v} = \nabla\phi$ (un écoulement potentiel est irrotationnel). L'accélération particulaire s'écrit

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (3.16)$$

De plus comme l'écoulement est irrotationnel on a :

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (3.17)$$

Donc on a :

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad (3.18)$$

Alors l'équation d'Euler avec la seule force extérieure du champ de pesanteur s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \right) = -\nabla P - \nabla(\rho g z) \quad (3.19)$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z \right) = 0 \quad (3.20)$$

En intégrant cette relation entre deux points quelconques de l'espace, on obtient que

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = cste \quad (3.21)$$



Pour un écoulement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible dans le champ de la pesanteur (axe vertical Oz dirigé vers le haut), le **théorème de Bernoulli** établit que, partout dans le fluide,

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = cste \quad (3.22)$$

3.3.3 Interprétation

Le théorème de Bernoulli peut être considéré comme un principe de conservation d'énergie adapté aux fluides parfaits incompressibles en mouvement. Considérons une particule fluide de volume unité :

- le premier terme $\rho \frac{v^2}{2}$ en est l'énergie cinétique,
- le second terme P correspond à "l'énergie de pression",
- le dernier terme $\rho g z$ en est l'énergie potentielle dans le champ de pesanteur.

La somme de ces trois termes est constante le long de la trajectoire, c'est-à-dire lorsque l'on suit la particule fluide dans son mouvement l'énergie définie comme précédemment se conserve. En effet, ici, le fluide est parfait : il n'y a pas de frottement à l'intérieur du fluide, donc pas de dissipation d'énergie.

Remarque : Le terme $\rho \frac{v^2}{2}$, homogène à une pression, est appelée pression dynamique.

Considérons un tube de courant supposé relativement effilé (FIGURE 3.3). La ligne centrale $\mathcal{L}$ est une ligne de courant particulière. On note $S(x)$ la section droite du tube au point d'abscisse x , et $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à la section $S(x)$, tangent à la ligne de courant et orienté dans le sens du courant. Dans l'étude des écoulements, on fait le plus souvent l'approximation des écoulements par tranches, c'est à dire :

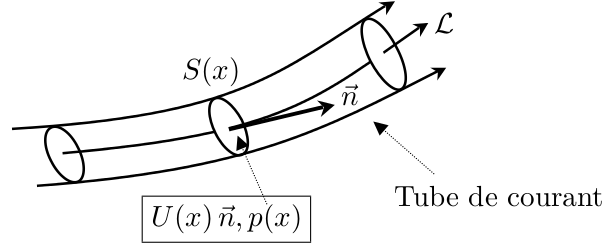


FIGURE 3.3 – Approximation des écoulements par tranche le long d'un tube de courant.

- en tout point de chaque section droite $S(x)$, le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ est tel que $\mathbf{v} = v(x)\mathbf{n}$,
- en tout point de chaque section droite $S(x)$, la pression P est telle que $P = P(x)$

Dans ce cas, pour l'écoulement présent à l'intérieur du tube de courant, nous pouvons écrire d'une part le théorème de Bernoulli le long de la ligne $\mathcal{L}$, et d'autre part la conservation du débit le long de ce même tube :

$$\rho \frac{\mathbf{v}(x)^2}{2} + P(x) + gz = cste \quad (3.23)$$

$$\rho \mathbf{v}(x) S(x) = cste \quad (3.24)$$

En effet, $\rho \mathbf{v}(x) S(x)$ est la quantité de fluide qui traverse, par unité de temps, la section $S(x)$. Puisqu'il n'y a aucun transfert de matière à travers la surface latérale du tube, la conservation du débit massique implique que cette quantité soit conservée tout le long du tube de courant.



- Si la section $S(x)$ décroît avec x , le tube est dit convergent. Dans ce cas, la vitesse croît et la pression décroît lorsque x croît.
- Si la section $S(x)$ croît avec x , le tube est dit divergent. Dans ce cas, la vitesse décroît et la pression croît lorsque x croît.
- Lorsqu'un tube convergent se prolonge par un tube divergent, on a un col. Dans ce cas, la vitesse passe par un maximum au col, alors que la pression passe par un minimum au col lorsque x croît.

3.4 Une application : l'effet Magnus

Reprenons l'exemple de l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait autour d'un cylindre étudié au chapitre précédent. La symétrie du problème implique que les vitesses (respectivement les pressions) soient identiques au dessus et au dessous du cylindre. Supposons maintenant que le cylindre tourne sur lui-même, avec le vecteur rotation $\mathbf{\Gamma}$ (voir FIGURE 3.4. Le caractère réel du fluide (visqueux) entraîne sa rotation au contact du solide (nous ne sommes plus ici dans le cas d'un fluide parfait). L'écoulement résultant est la somme de l'écoulement précédent et d'un vortex. Il est résulte que la vitesse du fluide vaut à présent $\mathbf{v}_H = \mathbf{v} + \Delta v \mathbf{e}_x$ au dessus du cylindre (Haut) et $\mathbf{v}_B = \mathbf{v} - \Delta v \mathbf{e}_x$ au dessous (Bas). La relation de Bernoulli peut être écrite sur la ligne de courant venant de l'infini et passant juste au dessus (resp. au dessous) du cylindre :

$$\rho \frac{U_0^2}{2} + P_0 = \rho \frac{v_H^2}{2} + P_H \quad (3.25)$$

$$\rho \frac{U_0^2}{2} + P_0 = \rho \frac{v_B^2}{2} + P_B \quad (3.26)$$

A l'infini, la vitesse et la pression sont uniformes (U_0, P_0). Ainsi, une sur-vitesse au dessus du cylindre implique une sous-pression, $V_H > V_B \Rightarrow P_H < P_B$, et donc une force de portance orientée vers le haut. On montre que dans ce cas, le potentiel de l'écoulement autour de la sphère étudié au Chapitre 2 est modifié. A l'aide du théorème de superposition, nous savons qu'il suffit d'ajouter au potentiel initial un terme traduisant la rotation du fluide. On introduit pour cela la circulation, le long du contour fermé $\mathcal{C}$:

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.27)$$

On montre alors que le potentiel total de l'écoulement s'écrit

$$\phi = U_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (3.28)$$

et les vitesses :

$$u_r = U_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad \text{et} \quad u_\theta = -U_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.29)$$

Les points d'arrêt sont donnés par $u_\theta(r = a) = 0$ et donc on a :

$$u_\theta(r = a) = -U_0 \left(1 + \frac{a^2}{a^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad \text{soit} \quad \sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi a U} \quad (3.30)$$

Ainsi si $0 < |\Gamma| < 4\pi a |U_0|$ alors on a deux points d'arrêt P_1 et P_2 symétriques. Pour $|\Gamma| > 4\pi R |U_0|$, on n'a plus de point d'arrêt sur la surface du cylindre. On a alors un point d'arrêt unique tel que $\sin \theta = \pm 1$:

$$-|U_0| \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{|\Gamma|}{2\pi r} = 0 \quad (3.31)$$

Le point d'arrêt se trouve donc à une distance r_a du centre, telle que :

$$r_a = a \left(\frac{|\Gamma|}{4\pi a |U_0|} + \sqrt{\left(\frac{|\Gamma|}{4\pi a |U_0|} \right)^2 - 1} \right) \quad (3.32)$$

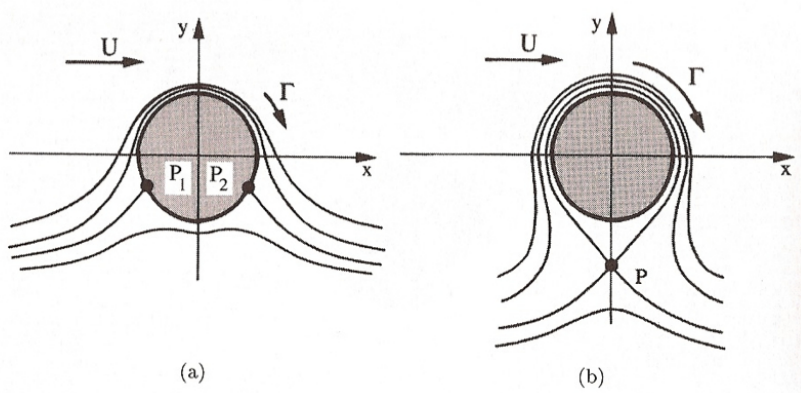


FIGURE 3.4 – Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini. Cas où la circulation Γ de la vitesse autour du cylindre est non nulle (négative dans le cas de la figure) ; (a) : $0 < |\Gamma| < 4\pi R |U|$; (b) $|\Gamma| > 4\pi R |U|$



Effet Magnus : Un objet en rotation placé dans un écoulement de fluide réel (visqueux) subit une force de portance orientée vers le haut ou le bas selon son sens rotation.

Dans le cas de notre cylindre en rotation, la force de portance vaut

$$F_p = \oint_C P dl = -\rho U_0 \Gamma \quad (3.33)$$

C'est cet effet qui est responsable des trajectoires incurvées des balles liftées ou coupées au tennis (fig. 3.5).

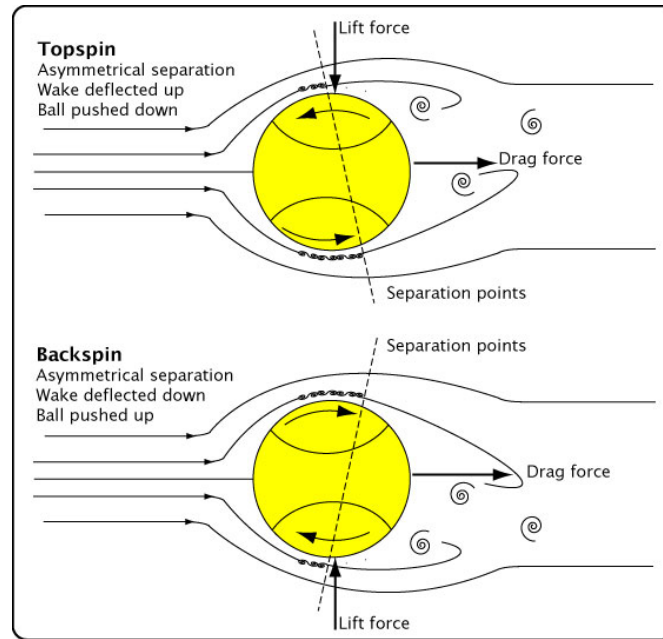


FIGURE 3.5 – Effet Magnus. Balle liftée (haut) ou coupée (bas).

3.5 Forces de trainée et de portance. Paradoxe de d'Alembert

Dans cette partie, nous considérons à nouveau un fluide parfait. Intéressons-nous à la portance $\mathbf{F}_p$ et à la trainée $\mathbf{F}_t$, c'est-à-dire les forces exercées sur le corps respectivement dans les directions perpendiculaire et parallèle à l'écoulement. La relation de Bernoulli appliquée le long d'une ligne de courant horizontale qui vient de l'infini et qui va jusqu'à un point d'arrêt, établit que la quantité $\rho \frac{v^2}{2} + P$ est une constante. Ainsi, sur l'obstacle, il y a conversion de l'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement. Il n'y a donc aucune dissipation d'énergie mécanique par frottement visqueux sur l'obstacle et par suite aucune force exercée sur l'obstacle.



Paradoxe de d'Alembert : quelle que soit sa forme, un obstacle placé dans un fluide non visqueux en écoulement uniforme, loin de toute paroi, ne subit de la part du fluide aucune force, ni dans la direction du mouvement, ni dans toute autre direction.

Ce résultat pose évidemment problème car l'expérience prouve le contraire : les avions volent et un objet en chute libre n'accélère pas indéfiniment. Il nous faut alors prendre en compte la **viscosité** du fluide. Lorsque le fluide est visqueux, la pression totale diminue. Il existe le long de l'obstacle une couche limite de faible épaisseur, dans laquelle la vitesse croît de la valeur nulle à la paroi à la valeur moyenne loin de

la paroi. À l'arrière de l'obstacle, la vitesse étant nulle à la paroi, la couche limite a tendance à se détacher et à provoquer une dépression. Il se produit alors un remous à l'arrière, dans lequel il y a dégradation d'énergie cinétique. La pression statique en aval étant inférieure à celle en amont, l'obstacle est soumis à une force antagoniste qui s'oppose au déplacement. Les forces exercées sur l'obstacle sont de deux types :

- La résistance de frottement liée à la formation de la couche limite et donc à l'aire de l'obstacle, à sa rugosité, à la viscosité et à la turbulence du fluide libre.
- la résistance de forme liée à l'importance du sillage en aval de l'obstacle et donc à la forme de l'obstacle.

Nous reviendrons sur ces notions dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Dynamique d'un fluide visqueux

Dans ce chapitre, nous nous proposons de donner quelques notions sur la dynamique des fluides réels. Pour cela, nous prendrons en compte les efforts intérieurs au fluide, mais pas uniquement ceux liés à la seule pression. Nous introduisons la notion de fluide visqueux comme exemple de fluides réels. Il s'agit d'un fluide où, entre les "filets fluides" en mouvement les uns par rapport aux autres, il y a du "frottement", ralentissant le mouvement et occasionnant une perte d'énergie.

4.1 Expérience avec un fluide réel

Considérons un écoulement permanent incompressible d'un fluide visqueux dans un dispositif de Couette cylindrique (voir FIGURE 4.1). Ce dispositif est constitué de deux cylindres coaxiaux verticaux, le cylindre intérieur pouvant être mis en rotation ou les deux si nécessaire.

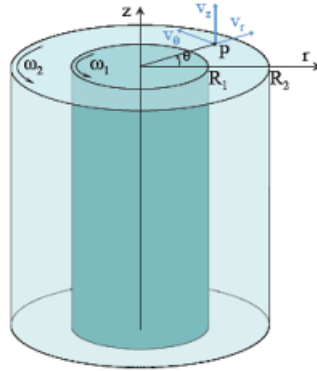


FIGURE 4.1 – Dispositif permettant de réaliser un écoulement de Couette cylindrique. Le fluide est disposé entre deux cylindres coaxiaux.

On observe que :

- Le mouvement des particules fluides est circulaire,
- La vitesse du fluide proche du cylindre en rotation atteint rapidement la vitesse du cylindre alors qu'en périphérie le fluide accélère progressivement,
- Le mouvement du fluide se propage du centre vers la périphérie.

Ces observations prouvent que l'équation d'Euler ne peut s'appliquer dans ce cas. En effet, la vitesse du fluide est orthoradiale $\mathbf{v} = v(r, \theta, z, t)\mathbf{e}_\theta$. L'équation d'Euler donne, par projection :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad -\rho \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r}, \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \quad (4.1)$$

La première équation est incompatible avec les observations : en l'absence de forces orthoradiales, un fluide parfait resterait immobile. Le gradient de pression étant radial, l'accélération orthoradiale ne peut s'expliquer que par des forces internes, différentes des forces de pression, dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'ici.

4.2 Force de viscosité

4.2.1 Notion de viscosité

Les efforts tangentiels, négligés pour les fluides parfaits, sont dus aux "frottements" des couches de fluide les unes avec les autres. Si on considère un fluide réel, donc visqueux, dans un écoulement plan parallèle au plan (Oxy) , stationnaire à lignes de courant parallèles à la direction (Ox) , tel que le champ de vitesse soit $\mathbf{v} = v(y)\mathbf{e}_x$. Alors si une paroi est à proximité du point d'observation on remarque que la vitesse dépend de la coordonnée y comme sur les exemples de la FIGURE 4.2. Un tel écoulement est dit *cisaillé*.

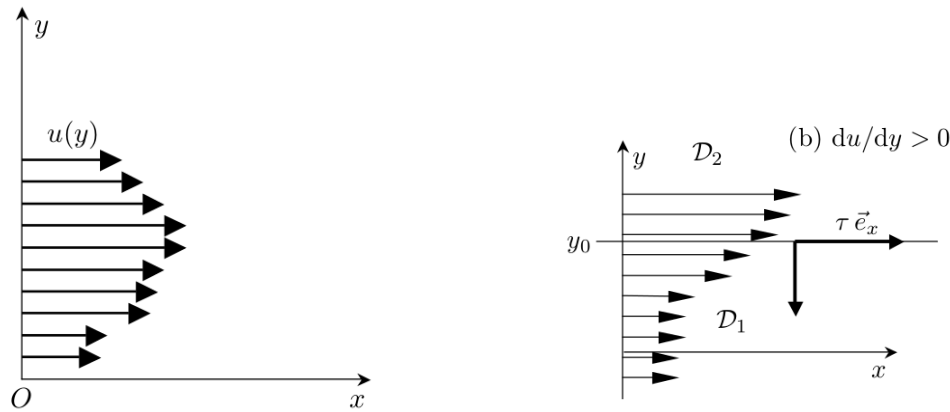


FIGURE 4.2 – Écoulements cisaillés. (a) Écoulement entre deux plaques : écoulement de Poiseuille. (b) Écoulement au dessus d'une plaque. Notations pour définition de la viscosité.

On considère un plan séparant deux régions de l'écoulement à la hauteur y_0 . Soit S , une petite surface de ce plan. L'action $\mathbf{F}$ du fluide situé au-dessus sur le fluide situé au dessous s'écrit :

$$\mathbf{F}_{h \rightarrow b} = (-P\mathbf{n} + \tau\mathbf{e}_x)S \quad (4.2)$$

où le premier terme correspond à la force normale de pression et le second à une force tangentielle, dite de *cisaillement* qui s'oppose au mouvement. La force totale est proportionnelle à la surface considérée.



Nous adoptons la loi de frottement simple suivante :

$$\tau = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y_0} \quad (4.3)$$

Le coefficient η est appelé coefficient de viscosité dynamique. Il dépend de la nature du fluide, de sa température mais pas de l'écoulement, et peut raisonnablement être considéré comme constant. Il est toujours positif ou nul. L'unité dans le système international de η est le Pa.s = $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ = Pl (Poiseuille).

Sur la FIGURE 4.2(b), on voit que le fluide va plus vite en haut qu'en bas ; τ est donc positif. Du fait

Fluide	Viscosité dynamique η en Pa.s	Viscosité cinématique ν en m ² /s
Air	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$\simeq 1.5 \cdot 10^{-5}$
Eau	$1.00 \cdot 10^{-3}$	$\simeq 10^{-6}$
Glycérol	1.49	$\simeq 10^{-3}$
Poix	$2.3 \cdot 10^{11}$	$\simeq 10^8$

FIGURE 4.3 – Quelques valeurs de viscosité à 20°C à la pression atmosphérique.

du frottement, le fluide en haut entraîne le fluide du bas. Inversement, d'après le théorème d'action et de réaction, le fluide du bas ralentit le fluide du haut.

Dans de nombreuses formules apparaît (car c'est un paramètre plus pertinent) le rapport du coefficient de viscosité dynamique η et de la masse volumique ρ . Ce rapport est appelé coefficient de viscosité cinématique et est noté $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. Son unité est le m².s⁻¹ = St (Stokes). On présente dans le tableau de la FIGURE 4.3 les valeurs typiques de viscosités.

Un fluide dont la viscosité dynamique est constante (qui ne dépend pas de la contrainte $\partial v / \partial y$) est dit **newtonien**. C'est le cas des corps purs en général (liquide ou gaz).

A l'inverse, un fluide dont la viscosité dépend de la contrainte est dit **complexe** ou **non-newtonien**.



- Un fluide dont la viscosité augmente avec la contrainte est dit **rhéo-épaississant**. On peut citer par exemple un mélange eau-maïzena ou les sables mouvants.
- Un fluide dont la viscosité diminue avec la contrainte est dit **rhéo-fluidifiant**. On peut citer par exemple la peinture ou le sang.
- Un fluide qui ne commence à couler qu'au delà d'une certaine contrainte est dit **à seuil**. Sa viscosité est infinie (il est donc solide) en-dessous du seuil et peut ensuite être constante ou non. On peut citer par exemple le dentifrice ou le sable sec.

4.2.2 Équivalent volumique

Dans le cas étudié précédemment où le champ de vitesse vérifie $\mathbf{v} = v(y, t)\mathbf{e}_x$, on peut considérer un élément de volume $d\tau = Sdy$. il est soumis à une force de cisaillement de la part du fluide du dessous (resp. du dessus) :

$$\mathbf{F}_1 = -\eta S \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y_0} \mathbf{e}_x \quad (4.4)$$

et du dessus :

$$\mathbf{F}_2 = \eta S \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y_0+dy} \mathbf{e}_x \quad (4.5)$$

L'écoulement étant invariant par translation le long de (Ox) , les forces exercées sur les faces des deux cotés sont opposées. La résultante des forces de cisaillement est donc :

$$\mathbf{F}_{\text{cis}} = \eta S \left(- \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y_0} + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y_0+dy} \right) \mathbf{e}_x \quad (4.6)$$

$$\mathbf{F}_{\text{cis}} = \eta S \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy \mathbf{e}_x \quad (4.7)$$

soit une force volumique

$$\mathbf{f}_{\text{cis},v} = \frac{\mathbf{F}_{\text{cis}}}{Sdy} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \mathbf{e}_x \quad (4.8)$$

Ce résultat se généralise dans le cas d'un fluide incompressible. La force volumique de cisaillement liée à la viscosité d'un fluide vaut :



$$\mathbf{f}_{\text{cis},v} = \eta \Delta \mathbf{v} \quad (4.9)$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien.

4.2.3 Diffusion de quantité de mouvement

Pour résumer, les filets fluides rapides entraînent les lents et inversement. Ce phénomène est d'autant plus important que le gradient de vitesse est accentué. Il s'agit d'un transfert interne de quantité de mouvement qui présente les caractéristiques d'une diffusion. Ce transfert est irréversible et il s'effectue dans le sens de l'uniformisation de la vitesse. On peut donc, par ces aspects, le comparer à de la diffusion thermique ou de la diffusion de particules. On reprend la situation précédente où le champ de vitesse vérifie $\mathbf{v} = v(y, t)\mathbf{e}_x$. La densité volumique de quantité de mouvement étant égale à $\rho\mathbf{v}$, la force cisaillement peut s'écrire

$$\mathbf{F} = -\frac{\eta}{\rho} S \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial y} = -\nu \nabla(\rho v_x) \cdot \mathbf{n} S \quad (4.10)$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$. On retrouve ainsi le même type de loi que la loi de Fourier ($\Phi = -k(\nabla T) \cdot \mathbf{n} S$) ou de Fick ($\Phi = -D(\nabla n^*) \cdot \mathbf{n} S$).

Pour cet écoulement ($\mathbf{v} = v(y, t)\mathbf{e}_x$), l'équation de la dynamique se réduit à



$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2(\rho v)}{\partial y^2} \quad (4.11)$$

équation de diffusion de la densité volumique de quantité de mouvement ρv .

4.2.4 Conditions aux limites

Étant donnée l'expression de la force de cisaillement due à la viscosité d'un fluide, il n'est pas possible d'avoir une discontinuité de vitesse. En effet, la force serait alors infinie. Les conditions aux limites sont donc nécessairement différentes de la situation d'un fluide parfait.

Paroi solide

Pour un fluide visqueux en mouvement le long d'une paroi solide au repos, la vitesse du fluide v à la paroi est nulle. On dit que le fluide adhère à la paroi. On rappelle que pour un fluide parfait, il y avait glissement du fluide le long de la paroi.

Interface

Dans le cas de deux fluides visqueux en mouvement et non miscibles, séparés par une surface S , les fluides ont des vitesses parallèles à l'interface (comme dans le cas de deux fluides parfaits) et ces vitesses sont égales.

4.2.5 Équation de Navier-Stokes

L'équation d'Euler, valable pour décrire la dynamique des fluides parfaits n'est plus valable pour des fluides visqueux.



En prenant en compte la force de cisaillement liée à la viscosité, on obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \quad (4.12)$$

4.3 Écoulements réels. Nombre de Reynolds

4.3.1 Écoulements laminaires et turbulents

Tous les liquides ne s'écoulent pas de la même manière. Si on observe l'eau d'un fleuve, on peut voir que son écoulement est en permanence le siège de multiples tourbillons. Au contraire, l'huile qui s'écoule hors d'une bouteille ne tourbillonne pas du tout. Étonnamment, la frontière entre ces deux situations est assez mince.

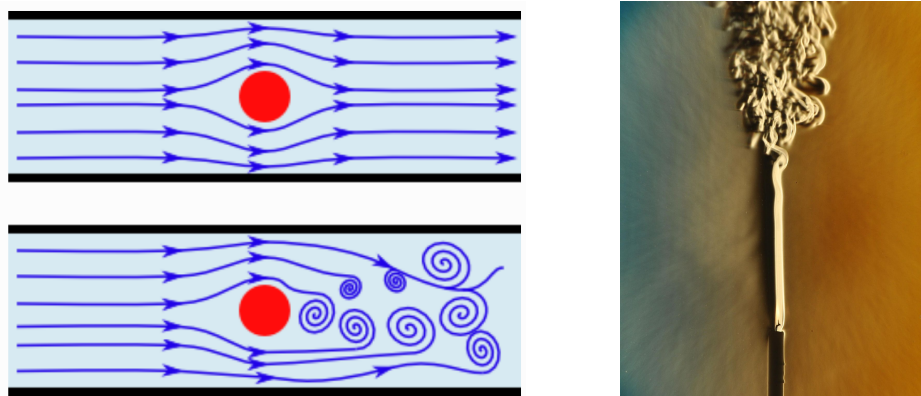


FIGURE 4.4 – (Gauche) Écoulement laminaire (haut) et turbulent (bas). (Droite) Transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent dans la fumée d'une bougie.



Un écoulement est dit laminaire si les lignes de courant glissent les unes sur les autres en restant parallèles. Ce type d'écoulement existe généralement à faible vitesse.

Un écoulement est dit turbulent lorsque la vitesse est élevée : il est instable, sa structure semble chaotique (tourbillons).

Les écoulements turbulents se repèrent particulièrement au voisinage d'obstacles, par exemple les piles d'un pont. La différence entre les deux situations est schématisée sur la FIGURE 4.4.

Comment savoir à l'avance si un écoulement va être le siège de turbulence ? Cela dépend principalement de la viscosité du liquide, car celle-ci agit comme un frottement qui va freiner les perturbations et empêcher les tourbillons d'apparaître. Il faut alors la comparer à l'inertie de l'écoulement. Considérons un liquide qui s'écoule à une vitesse moyenne U , dans un tube de diamètre L .

Avec ces quantités et les propriétés intrinsèques au fluide, on peut définir un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds



$$\text{Re} = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu} \quad (4.13)$$

Ce nombre est la seule quantité sans dimension que nous pouvons construire avec les paramètres U , L , ρ et η . Si Re est faible ($\text{Re} \leq 2000$), l'écoulement est généralement laminaire. Pour Re grand ($\text{Re} > 2000$), il est souvent turbulent.

Pour un écoulement d'eau autour d'un objet centimétrique, on a $\rho \simeq 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\eta \simeq 10^{-3} \text{ Pa.s}$.

On observe un régime laminaire pour $U \sim 1 \text{ cm/s}$, soit $\text{Re} \simeq 10^2$.

À l'inverse, on observe un régime turbulent pour $U \sim 1 \text{ m/s}$, soit $\text{Re} \simeq 10^4$.



Nous avons évoqué la condition d'incompressibilité d'un écoulement dans le premier chapitre. Elle se traduit par $\frac{Ma^2}{\text{Re}} \ll 1$ où, pour rappel, $Ma \equiv \frac{v}{c_s}$ est le nombre de Mach c_s désigne la vitesse du son.

4.3.2 Interprétations du nombre de Reynolds

On peut interpréter de plusieurs façons le nombre de Reynolds.

Transfert de quantité de mouvement

La masse qui traverse la surface dS pendant le temps dt vaut $dm = \rho v dS dt$. La quantité de mouvement massique étant égale à v , il y a un flux convectif de quantité de mouvement massique égal à $dp_c = \rho v^2 dS dt$. Comme évoqué précédemment, il y a également un flux diffusif de quantité de mouvement massique $dp_d = \nu \|\nabla(\rho v)\| dS dt$.



Le nombre de Reynolds peut alors être défini comme le rapport du flux convectif de quantité de mouvement massique sur le flux diffusif de la même quantité. Avec les ordres de grandeurs relatifs à l'écoulement étudié, on a

$$\text{Re} = \frac{\text{Flux convectif}}{\text{Flux diffusif}} = \frac{\rho U^2}{\eta U/L} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}$$

Temps caractéristiques

Comparons les termes de variation locale $\frac{\partial v}{\partial t}$ et convective $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ de vitesse. Si ces termes sont voisins, on a $v/\tau_c \sim v^2/L$, ce qui permet de définir un temps caractéristique convectif $\tau_c \sim L/v$ (temps typique mis par une particule pour parcourir L par convection).

De même, on peut comparer les termes de variation locale $\frac{\partial v}{\partial t}$ et diffusive $\nu \Delta v$ de la vitesse. Si ces termes sont voisins, on a $v/\tau_d \sim \nu v/L^2$, ce qui permet de définir un temps caractéristique diffusif $\tau_d \sim L^2/\nu$ (temps typique mis par une particule pour parcourir L par convection).



Le nombre de Reynolds peut alors être défini comme le rapport du temps typique de la diffusion de quantité de la vitesse et du temps typique de convection de la vitesse. Avec les ordres de grandeurs relatifs à l'écoulement étudié, on a

$$\text{Re} = \frac{\text{Temps diffusif}}{\text{Temps convectif}} = \frac{L^2/\nu}{L/U} = \frac{U L}{\nu} \quad (4.14)$$

Équation de Navier-Stokes

Enfin on peut le définir à partir de l'équation de Navier-Stokes comme un rapport des deux termes d'accélération :

$$\text{Re} = \frac{\|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\|}{\|\nu \Delta \mathbf{v}\|} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{U L}{\nu} \quad (4.15)$$

Type d'écoulement	Charges mobiles	Particules de fluide
Débit	Intensité I	Débit volumique Q_v
Différence de potentiel	ΔU (différence de tension)	ΔP (différence de pression)
Résistance	$R = \frac{\Delta U}{I}$	$R_h = \frac{\Delta P}{Q_v}$
Groupeement série	$I = I_k, \Delta U = \sum_k \Delta U_k, R_{eq} = \sum_k R_k$	$Q_v = Q_{v,k}, \Delta P = \sum_k \Delta P_k, R_{h,eq} = \sum_k R_{h,k}$
Groupeement parallèle	$\Delta U = \Delta U_k, I = \sum_k I_k, \frac{1}{R_{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$	$\Delta P = \Delta P_k, Q_v = \sum_k Q_{v,k}, \frac{1}{R_{h,eq}} = \sum_k \frac{1}{R_{h,k}}$

FIGURE 4.5 – Analogie électrique - mécanique des fluides



À nombre de Reynolds élevé, les transferts de quantité de mouvement par convection sont plus importants que ceux par diffusion. Le temps caractéristique associé à ces transferts par convection est plus court que celui par diffusion.

À nombre de Reynolds faible, les transferts de quantité de mouvement par diffusion sont plus importants que ceux par convection. Le temps caractéristique associé à ces transferts par diffusion est plus court que celui par convection

4.4 Analogie hydro-électrique



La résistance hydraulique est une grandeur caractérisant une conduite et permettant de calculer la perte de charge subie par un fluide s'écoulant dans la conduite. Elle définie par

$$R_h = \frac{\Delta P}{Q_v} \quad (4.16)$$

où ΔP est la différence de pression amont-aval dans la conduite et Q_v de débit volumique du fluide.

Cette définition est totalement équivalente à celle faite en électricité $R_e = \frac{U}{I}$ où U désigne la différence de potentiel et I le débit de charges électriques ou en thermique $R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi}$ où ΔT est la différence de température et Φ le flux de chaleur. On peut établir une analogie entre électricité et mécanique de fluide, notamment en ce qui concerne l'association de résistances, comme expliqué dans la FIGURE 4.5.

Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille étudié en TD, on a une résistance hydraulique qui vaut

$$R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \quad (4.17)$$

Une question que l'on peut naturellement se poser est de savoir si, pour un même gradient de pression imposé, il vaut mieux utiliser une conduite de section S ou 2 conduites de section $S/2$ (de façon à garder une section totale constante). La réponse est dans la dépendance en S^2 du débit volumique Q_v (ce qui revient à avoir une résistance hydraulique en $1/R^4$: dans le premier cas on trouve un débit total $Q_{v,1}$, dans le second un débit total

$$Q_{v,2} = \frac{Q_{v,1}}{4} + \frac{Q_{v,1}}{4} = \frac{Q_{v,1}}{2} \quad (4.18)$$

donc deux fois inférieur. Si on prend n tuyaux de section S/n , on obtiendra un débit total

$$Q_{v,n} = \frac{Q_{v,1}}{n^2} + \frac{Q_{v,1}}{n^2} + \frac{Q_{v,1}}{n^2} + \dots = \frac{Q_{v,1}}{n} \quad (4.19)$$

On peut reprendre le concept de résistance hydraulique pour décrire cette situation. Le débit à travers un tuyau de section S/n vaut $Q_{v,1}/n^2$. La résistance hydraulique associée à ce tuyau vaut donc

$$R = \frac{n\Delta P}{Q_{v,1}} \quad (4.20)$$

Or, puisque les tuyaux sont associés en parallèle (le ΔP est le même pour tous les tuyaux), la résistance équivalente des n tuyaux associés vaut $R_{eq} = \frac{n}{R}$, soit

$$R_{eq} = n \frac{\Delta P}{Q_{v,1}} = nR_1 \quad (4.21)$$

À section totale constante, il est donc plus difficile de faire couler un fluide dans plusieurs petits tuyaux que dans un gros.

4.5 Écoulements rampants - Équation de Stokes

4.5.1 Écoulements à très faible Reynolds

Les écoulements à petits nombres de Reynolds, parfois appelés écoulements rampants, peuvent avoir des origines physiques très variées, puisque ce nombre est obtenu par combinaison de trois facteurs différents :

- Déplacements d'objets microscopiques (bactéries, particules) : $L \ll 1 \Rightarrow \text{Re} \ll 1$
- Déplacements à vitesse lente de matériaux géologiques (glacier, manteau terrestre) : $U \ll 1 \Rightarrow \text{Re} \ll 1$
- Écoulements de fluides très visqueux (goudrons, pâtes, miel) : $\eta \gg 1 \Rightarrow \text{Re} \ll 1$

Reprenons l'équation de Navier-Stokes qui décrit l'écoulement incompressible d'un fluide :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mathbf{f}_v + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (4.22)$$



Si on se place dans un écoulement à petit Reynolds ($\text{Re} \ll 1$), on peut négliger le terme $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. En régime permanent, on aboutit à l'équation de Stokes :

$$-\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_v = 0 \quad (4.23)$$

On parle alors d'**écoulement rampant**.

Revenons sur notre écoulement permanent incompressible d'un fluide visqueux dans un dispositif de Couette cylindrique (voir FIGURE 4.1). L'équation de Stokes stationnaire se réduit à

$$\eta \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

Le renversement du temps $t \rightarrow -t$ laisse donc cette équation inchangée. Par conséquence si on réalise une rotation du cylindre intérieur d'un certain angle puis qu'on réalise la rotation inverse, le fluide revient à son état de départ (FIGURE 4.6)



Il ne s'agit pas de réversibilité au sens thermodynamique : de la chaleur est dissipée dans le fluide par viscosité et il y a création d'entropie. Pour ne pas confondre, on parle de renversabilité.

4.5.2 Écoulement en milieu poreux. Loi de Darcy

Milieu poreux



Un solide est dit **poreux** lorsqu'il contient des cavités de petites dimensions, dans lesquelles un liquide est susceptible de s'écouler. On peut citer par exemple de l'eau qui ruisselle dans le sol ou la diffusion de molécules dans une membrane.

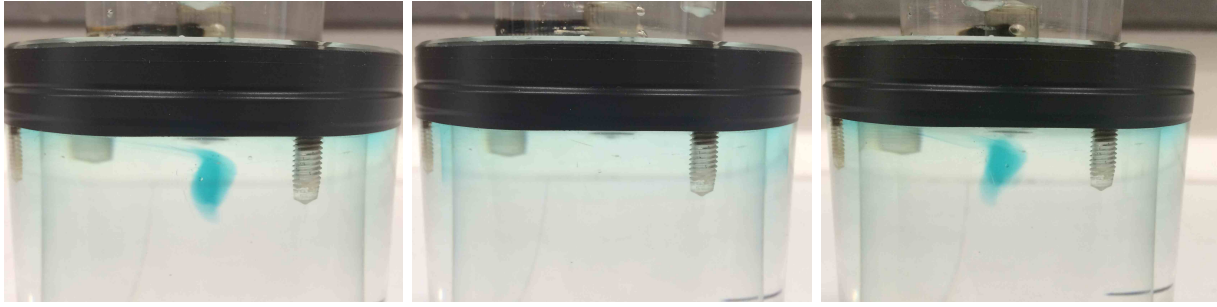


FIGURE 4.6 – Visualisation de la renversabilité de l'écoulement cylindrique de Couette à bas nombre de Reynolds : on effectue une longue rotation du cylindre intérieur puis la rotation inverse. La tâche de colorant a la même position et sensiblement la même forme au début de l'expérience et après la rotation inverse.



La **porosité** d'un milieu est définie par $\mathcal{P} = V_p/V$ où V_p désigne le volume des pores et V du solide considéré.

L'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux s'effectue le long de canaux de très faible section qui relient les pores entre eux. Si l'écoulement est suffisamment lent, il est considéré comme rampant (petite valeur de Re).

Loi de Darcy

On peut modéliser un milieu poreux par n capillaires en parallèle les uns des autres. On peut donc reprendre l'exemple de l'écoulement de Poiseuille traité précédemment pour étudier ce problème. Dans ces conditions $\frac{P_s - P_e}{L}$ est le gradient de pression local.

Calculons la vitesse moyenne $v_m = Q_n/S$ pour n tuyaux de section $S_n = S/n$:

$$v_m = \frac{Q_{v,n}}{S} = \frac{Q_{v,1}}{nS} = \frac{\Delta P S}{8\eta L n} = -\frac{S_n}{8\pi\eta} \frac{P_s - P_e}{L} \quad (4.25)$$

On obtient donc une relation de proportionnalité entre la vitesse moyenne de l'écoulement et le gradient de pression.

La **loi de Darcy** s'écrit :



$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\eta} \nabla P \quad \text{ou encore} \quad Q_v = \frac{kS}{\eta} \frac{\Delta P}{L} \quad (4.26)$$

où k désigne la perméabilité du milieu poreux et est homogène à une surface.

Dans l'exemple traité juste avant, on a $k = S_n/(8\pi) = \frac{S}{n8\pi}$. Plus le milieu est divisé en "petits tuyaux", plus sa perméabilité est faible, donc plus sa résistance hydraulique est grande.

REMARQUE : Dans le cas d'un milieu constitué de p capillaires par unité de surface, tous de rayon r , en parallèle les uns des autres, on montre facilement que $k = \frac{p\pi r^4}{8}$ et sa porosité $\mathcal{P} = p\pi r^2$. Porosité et perméabilité sont donc reliées par $k = \frac{r^2}{8} \mathcal{P}$.

4.6 Écoulement autour d'un obstacle

4.6.1 Force de trainée

On considère un solide placé dans un écoulement dans un milieu infini.

Par définition, la **force de trainée** est la composante parallèle à la vitesse de l'écoulement à l'infini de la force résultante des forces dues à l'écoulement du fluide.

On définit le **coefficient de trainée**, C_x , sans dimension, tel que



$$C_x = \frac{F_{\text{trainée}}}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} \quad (4.27)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, V_∞ la vitesse du fluide à l'infini et S la section apparente du solide dans un plan orthogonal à la direction de l'écoulement (voir FIGURE 4.7).

Par analyse dimensionnelle, on montre que pour un obstacle de forme et d'orientation données, le coefficient de trainée ne dépend que du nombre de Reynolds : $C_x = f(\text{Re})$.

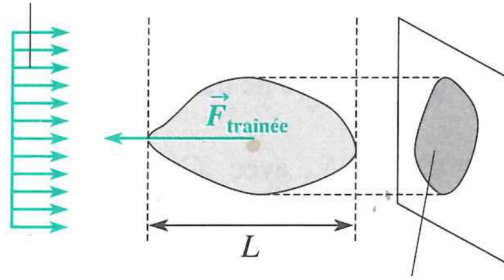


FIGURE 4.7 – Solide placé dans un écoulement dans un milieu infini. La zone grisée correspond à la section apparente de l'objet, S .

Nous verrons dans le TD que pour un écoulement rampant ($\text{Re} \ll 1$) autour d'une sphère, $C_x = 24/\text{Re}$ avec

$$\text{Re} = \frac{\rho 2RV_\infty}{\eta} \quad (4.28)$$

On peut étudier l'évolution de C_x avec Re , à l'aide de la FIGURE 4.8.

On observe plusieurs zones dans ce graphe :

- Pour $\text{Re} < 1$, la force de trainée dépend linéairement de Re . La force de trainée est proportionnelle à la vitesse de l'écoulement.
- Pour $1 < \text{Re} < 500$, il apparaît un tourbillon derrière la sphère, qui devient de moins en moins stable. C_x dépend de Re de façon complexe.
- Pour $10^3 < \text{Re} < 10^5$, C_x est quasi-constant c'est-à-dire la trainée est proportionnelle au carré de la vitesse. Pour la sphère on a $C_x \simeq 0.6$.
- Pour $\text{Re} > 5 \cdot 10^5$, les tourbillons évoluent de façon chaotique derrière la sphère. Il apparaît une chute notable de la valeur de C_x qui correspond à une transition de couche limite laminaire-turbulente, concept que nous allons aborder dans le paragraphe qui suit.

4.6.2 Couche limite

La notion de couche limite laminaire intervient lorsqu'on étudie les écoulements laminares à grand nombre de Reynolds autour d'un solide. Loin du corps, et tant que l'écoulement incident n'est pas turbulent, les termes de forces de viscosité de l'équation du mouvement sont négligeables, et l'écoulement a pratiquement le profil qui correspond à celui d'un fluide parfait.

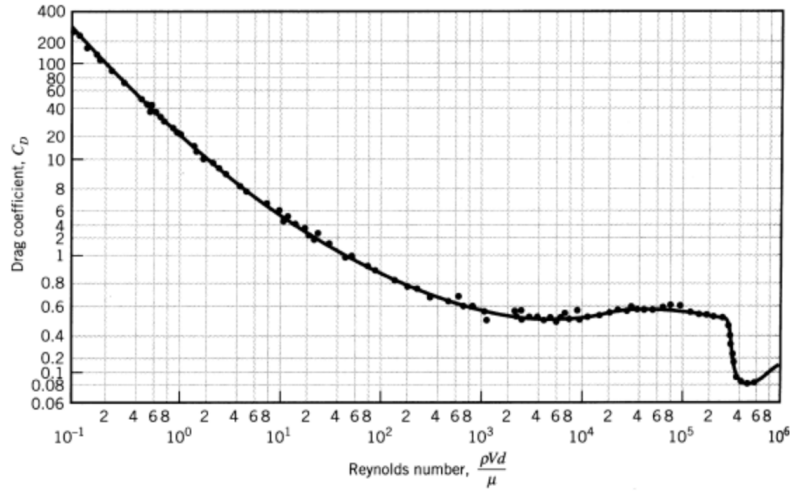


FIGURE 4.8 – Évolution du C_x pour l'écoulement autour d'une sphère lisse pour un Reynolds $Re = \frac{\rho 2RV_\infty}{\eta}$.



L'écoulement d'un fluide de faible viscosité autour d'un solide est voisin de celui d'un écoulement parfait, à l'exception d'une zone située au voisinage du solide, appelée **couche limite**. Les effets de la viscosité, et en particulier, la création de tourbillons, sont quasiment limités à cette couche limite. Le raccordement entre la solution d'écoulement de fluide parfait (loin du solide) et la condition de vitesse nulle sur les parois solides se fait typiquement sur l'épaisseur de la **couche limite**, épaisseur d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est grand.

Dans cette région, les termes de viscosité et de convection sont à prendre en compte simultanément. On peut voir l'exemple d'un tel écoulement sur la FIGURE 4.9. Cette partie est donc un complément nécessaire à l'étude du fluide parfait en écoulement potentiel.

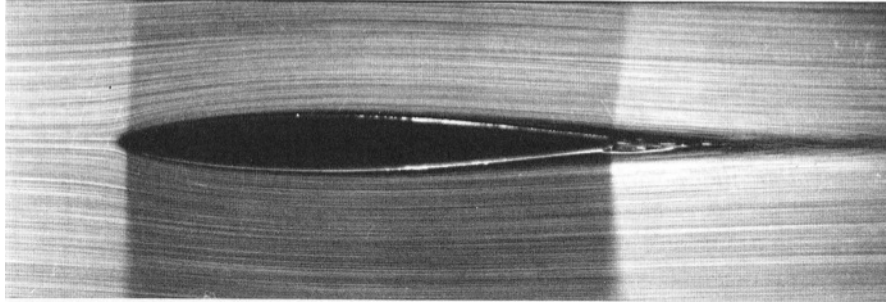


FIGURE 4.9 – Couche limite et sillage laminaire le long d'un profil d'aile placé sous incidence nulle dans un écoulement uniforme.

4.6.3 L'approximation de la couche limite

Si l'on se place dans le cadre des approximations d'un écoulement à 2 dimensions en régime stationnaire avec, loin de la paroi solide

$$\mathbf{u}_0(x, y) \quad \text{et} \quad P_0(x, y) \quad (4.29)$$

On observe alors une couche limite comme illustré sur la FIGURE 4.10. On peut établir par le calcul la

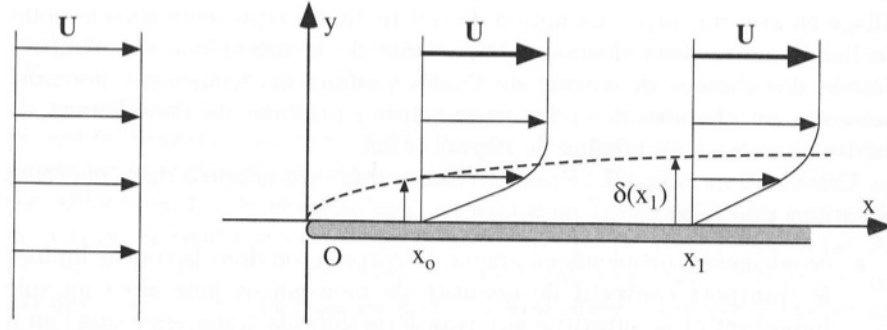


FIGURE 4.10 – Développement d'une couche limite le long d'une plaque plane semi-finie, d'arête perpendiculaire en O au plan de la figure et placée dans un écoulement uniforme de vitesse U . Les gradients de vitesse générés près de la paroi, par suite de la condition de vitesse nulle sur la surface, diffusent perpendiculairement à la plaque, en même temps qu'ils sont entraînés par l'écoulement. Notons qu'ici nous avons dilaté fortement l'échelle suivant Oy .

forme exacte de la couche limite. on montre que le profil de vitesse varie comme

$$u(x, y) = \sqrt{U\nu x} \ f\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) \quad (4.30)$$

où f est une fonction dont la forme est celle qui apparaît sur la FIGURE 4.10 et qui ne dépend pas du nombre de Reynolds. On voit ainsi apparaître une longueur caractéristique $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ de la couche limite : le profil de vitesse constant pour $y > 5\delta(x)$.

Ainsi, pour un écoulement incompressible, stationnaire, à grand Re , autour d'un obstacle de taille typique L , on montre que :

- la couche limite, supposée laminaire, a une épaisseur δ telle que

$$\frac{\delta}{L} \simeq \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (4.31)$$



- pour une plaque plane, on montre que la force de traînée par unité de largeur vaut

$$\frac{F_{\text{traînée}}}{l} = 0.664\sqrt{\eta\rho U^3 L} \quad (4.32)$$

La force adimensionnée vaut donc

$$\frac{F_{\text{traînée}}/l}{\rho U^2 L} = \frac{0.664}{\sqrt{Re}} \quad (4.33)$$

4.6.4 Décollement et influence sur la traînée

On parle de décollement de la couche limite lorsqu'on est à trop grand Reynolds et que des tourbillons se forment en aval d'un point de décollement ; on donne des exemples sur la FIGURE 4.11.

On peut prendre comme exemple le cylindre :

$$v_\theta(r = R) = -2U \sin \theta \quad (4.34)$$

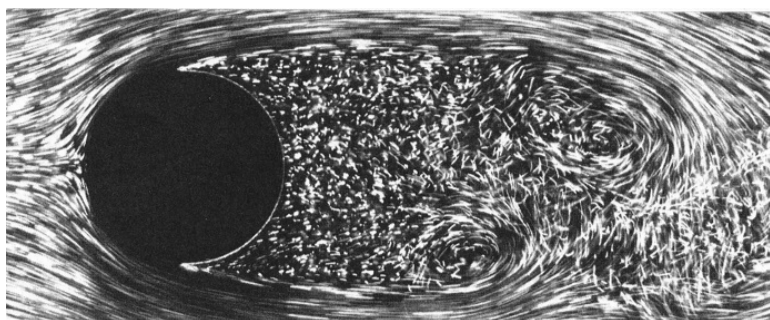
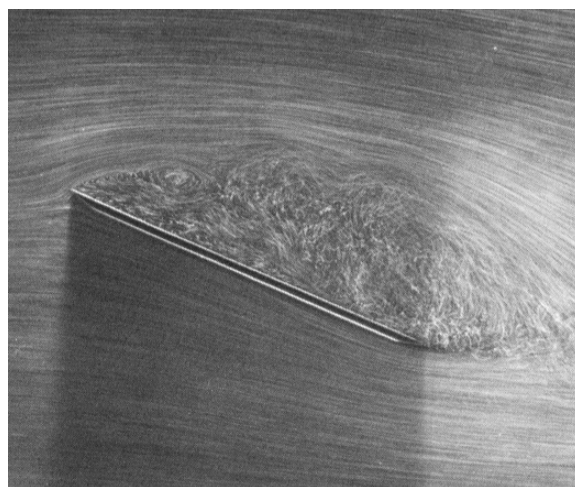
*Sur une sphère.**Sur une plaque inclinée.*

FIGURE 4.11 – Exemple de décollement de la couche limite.

D'après Bernoulli le long d'une ligne de courant venant de l'infini jusqu'au point d'étude, on a :

$$P + \rho \frac{v_\theta^2}{2} = P_0 + \rho \frac{U^2}{2} \quad (4.35)$$

$$P = \left(P_0 + \frac{\rho U^2}{2} \right) - \rho \frac{v_\theta^2}{2} \quad (4.36)$$

Le maximum de la vitesse v_θ correspond au minimum de pression P en $\pi/2$. C'est à cet endroit qu'a lieu le décollement : au sommet du cylindre. Si on a un écoulement potentiel, on a montré via le paradoxe de d'Alembert qu'il n'y avait pas de force de trainée. Mais la présence de la couche limite implique l'existence d'une force de trainée ; qui est proportionnelle à $U^{3/2}$. Par ailleurs, on montre que s'il y a décollement de la couche limite, alors la force est proportionnelle à U^2 , plus forte donc que celle sans décollement.



On va donc chercher à limiter le décollement de la couche limite, afin de minimiser la force de trainée. C'est l'objectif du profilage d'un objet, pour une aile ou une voiture par exemple.

La transition d'une couche limite laminaire vers une couche limite turbulente permet une meilleure adhérence de celle-ci et donc la réduction de la trainée (crise de trainée, FIGURE 4.8). C'est la raison pour laquelle on n'utilise pas une balle parfaitement lisse au golf (voir FIGURE 4.12).

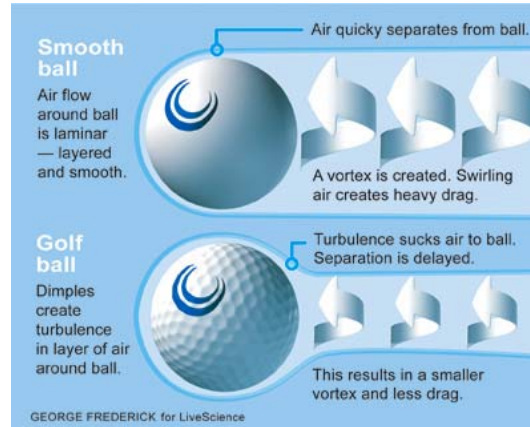


FIGURE 4.12 – Réduction de la traînée d'une balle de golf par l'ajout de rugosités afin de rendre la couche limite turbulente.

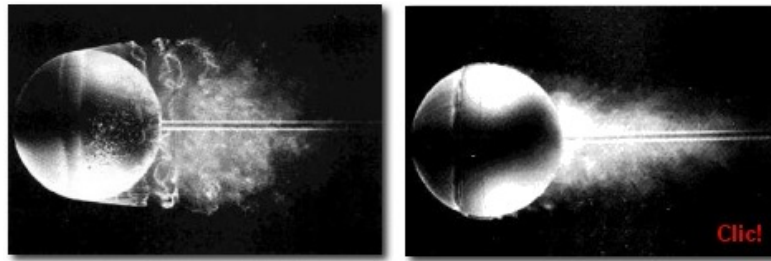


FIGURE 4.13 – (Gauche, $Re = 15000$) Couche limite laminaire sur une sphère lisse. (Droite, $Re = 30000$) Couche limite turbulente obtenue par ajout d'une rugosité. On provoque ainsi la crise de traînée à plus faible Reynolds que prévu pour une sphère lisse (cf figure 4.8).

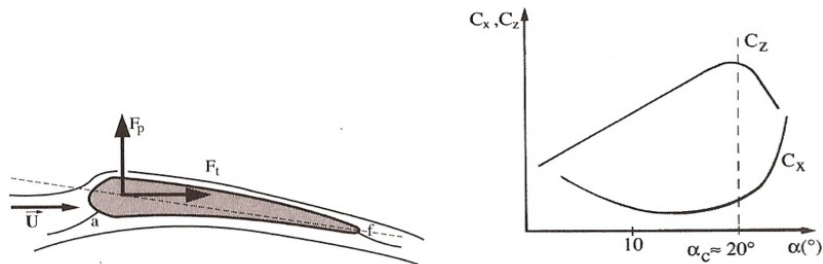


FIGURE 4.14 – (Gauche) Vue schématique de l'écoulement autour d'une aile et des forces de portance et de traînée. a et f sont les bords d'attaque et de fuite. (Droite) Variation des coefficients de portance C_z et de traînée C_x en fonction de l'angle d'incidence α . On voit que pour $\alpha \simeq 20^\circ$, on a décollement de la couche limite. Cela se traduit par une traînée beaucoup plus forte et une chute brutale de la portance.

Chapitre 5

Bilans dans les fluides

À partir des lois de la mécanique des systèmes matériels et des lois de la thermodynamique appliqués à des systèmes fermés, nous nous proposons d'étudier ces lois/principes pour des systèmes ouverts. Ainsi, à travers des exemples, nous étudierons des systèmes dans lesquels des fluides s'écoulent.

5.1 Bilan de quantité de mouvement

Théorème de la résultante cinétique ou Principe fondamental de la dynamique

On rappelle que pour un système matériel (fermé), la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à la résultante des forces extérieures appliquées au système. Par ailleurs, la résultante des forces intérieures est nulle.

5.2 Bilan de moment cinétique et d'énergie cinétique

5.2.1 Théorème du moment cinétique

La dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un axe fixe d'un système matériel (fermé) est égale au moment résultant, par rapport à cet axe, des forces extérieures appliquées au système.

5.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un système matériel est égale à la puissance des forces extérieures et intérieures.

5.3 Bilan d'enthalpie et d'entropie

5.3.1 Situation de travail

Nous allons ici appliquer les principes de la thermodynamique à un fluide qui s'écoule dans une canalisation. Nous supposons l'écoulement unidimensionnel. Appelons $\mathcal{S}$ le système ouvert constitué par le fluide compris entre les sections Σ_A et Σ_B , et $\mathcal{S}^*$ le système fermé constitué par le fluide compris entre les sections $\Sigma_{A'}$ et $\Sigma_{B'}$.

Pour le système fermé $\mathcal{S}^*$ et d'après le premier principe de la thermodynamique, on a

$$\Delta E(\mathcal{S}^*) = W + Q \quad \text{avec} \quad E = U + E_K + E_P \quad (5.1)$$

où W est le travail reçu, Q la chaleur reçue, U l'énergie interne, E_K l'énergie cinétique et E_P l'énergie potentielle.

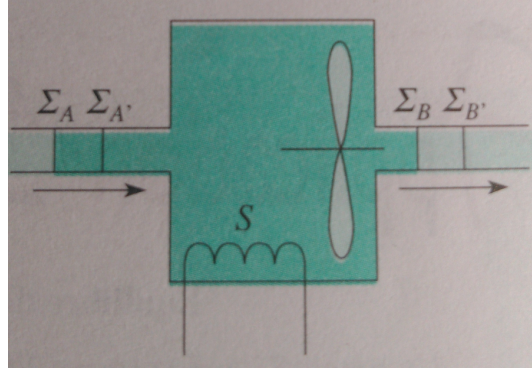


FIGURE 5.1 – Entre les sections Σ_A et Σ_B , le fluide peut échanger de l'énergie sous forme de travail utile ou de transfert thermique.

$\mathcal{S}^*$ peut recevoir de la chaleur Q sous forme de rayonnement ou de conduction, du travail W utile cédé par une machine et du travail lié aux forces de pressions. On notera P_{th} , P_u et respectivement P_i les puissances associées.



La puissance des forces intérieures de viscosité n'a pas à être prise en compte dans ce bilan.

5.3.2 Bilan enthalpique

Un bilan effectué entre les temps t et $t + dt$ sur le système $\mathcal{S}^*$ permet d'établir la variation de l'énergie de $\mathcal{S}^*$, en introduisant les énergies massiques et le débit massique D_m :

$$\frac{dE_{\mathcal{S}^*}}{dt} = \frac{dE_{\mathcal{S}}}{dt} + \left(u_B + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \right) D_{m,B} - \left(u_A + \frac{v_A^2}{2} + gz_A \right) D_{m,A} \quad (5.2)$$

La puissance des forces de pressions vaut

$$P_{pression} = P_A S_A v_A - P_B S_B v_B = \frac{P_A}{\rho_A} D_{m,A} - \frac{P_B}{\rho_B} D_{m,B} \quad (5.3)$$



Dans le cas d'un écoulement permanent ($\frac{d}{dt} = 0$), la puissance mécanique utile et la puissance thermique, reçues par le système entre A et B , s'exprime en fonction de l'enthalpie massique $h = u + \frac{P}{\rho}$:

$$P_{th} + P_u = \left[(h_B - h_A) + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + g(z_B - z_A) \right] D_m \quad (5.4)$$

Chapitre 6

Capillarité

6.1 Effets de surface et tension superficielle

6.1.1 Mise en évidence expérimentale

Considérons un film de liquide supporté par un cadre rectangulaire métallique dont un des côtés est mobile : on constate qu'il faut appliquer une force pour étendre l'aire du film liquide FIGURE 6.1 gauche. Son aire tend à être réduite si ce côté est laissé libre.

Par ailleurs, si on considère un film de liquide supporté par un cadre rectangulaire, deux côtés (B et D) sont reliés par un fil à coudre. Lorsque l'on perce un des films, le fil s'étire de façon à minimiser l'aire du film liquide FIGURE 6.1 droite.



FIGURE 6.1 – A gauche, force de tension superficielle sur un barreau mobile. A droite, fil tendu par les forces de tension superficielle.

On observe également que des surfaces fluides telles que la surface de l'eau ou une bulle sont des surfaces très lisses et régulières jusqu'à l'échelle moléculaire. Pour un système présentant plusieurs phases (deux liquides non miscibles, liquide/gaz, liquide/solide...), la création d'interface a un coût énergétique ; coût qu'il convient de minimiser. Plus une interface est étendue, plus elle a un coût énergétique élevé.



L'aire des interfaces entre plusieurs phases tend à être minimisée en raison de son coût énergétique.

6.1.2 Définition de la tension superficielle



Considérons une interface d'aire $\mathcal{A}$. Pour accroître son aire de $d\mathcal{A}$, il faut fournir un travail δW tel que :

$$\delta W = \gamma d\mathcal{A} \quad (6.1)$$

γ est appelée tension superficielle et s'interprète comme une **énergie par unité de surface**. Elle s'exprime donc en J/m^2 .

6.1.3 Origine physique

Au sein d'un fluide, les molécules exercent des forces d'attraction ou de répulsion (les forces de Van der Waals, les liaisons hydrogènes pour les fluides courants). Dans un corps pur, les molécules s'attirent. Au sein du liquide, la résultante de ces forces est nulle. À l'interface avec une phase gazeuse peu dense (FIGURE 6.2), les molécules perdent la moitié de leurs interactions favorables : l'augmentation de l'aire de cette interface est défavorisée.

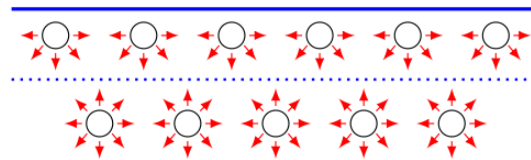


FIGURE 6.2 – Origine physique de la tension de surface. Les molécules à la surface ont un "manque" d'interactions de la part du fluide au-dessus par rapport au molécule en volume.

Il en est de même si on considère une interface entre deux fluides non miscibles : les molécules à l'interface ont des interactions défavorables avec celles de l'autre fluide.

Ordres de grandeurs

On note U l'énergie de cohésion par molécule au sein du liquide. Une molécule à la surface perd $\frac{1}{2}U$. Si a est la dimension d'une molécule, a^2 est la surface occupée par cette molécule. On quantifie naturellement la tension de surface comme étant $\frac{U}{2a^2}$.

La tension de surface dépend donc de :

- la nature des phases : si c'est un gaz, la nature du gaz ainsi que sa pression influent peu dans une certaine limite ;
- la température : γ diminue généralement lorsque la température augmente ;
- la présence d'impuretés dans une des phases.

Quelques valeurs de tensions superficielles de l'interface gaz/liquide :

- Huile, éthanol $U \approx 40$ meV (liaisons de Van der Waals), $a \approx 0.3$ nm : $\gamma \approx 20$ mJ/m² ;
- Eau : $\gamma \approx 70$ mJ/m² (liaisons hydrogène) ;
- Sels fondus : $\gamma \approx 120$ mJ/m² (liaisons ioniques) ;
- Mercure/étain liquide : $\gamma \approx 500$ mJ/m² (liaisons métalliques) ;

6.1.4 Lien avec la mécanique et avec la thermodynamique

Considérons une portion rectangulaire de la surface plane d'un liquide (FIGURE 6.3). Si le côté AB, de longueur b du rectangle se déplace de dx , le travail à fournir est $\delta W = \gamma d\mathcal{A} = \gamma b dx$. Le travail de la force exercée par le fluide est donc $\delta W = -\gamma b dx$.

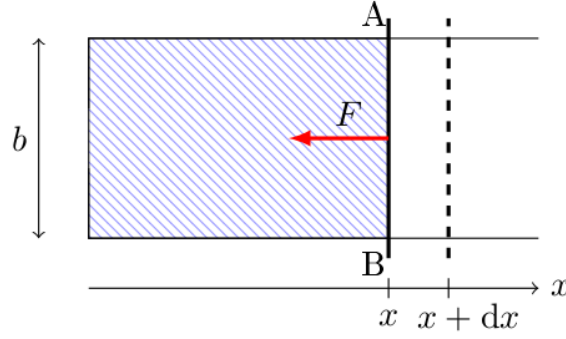


FIGURE 6.3 – Approche mécanique des forces de tension superficielle.



Ce travail est donc associé à une force $\vec{F}$, dirigée vers l'intérieur, parallèle à (Ox) , et de norme proportionnelle à la longueur b :

$$\vec{F} = -\gamma b \mathbf{e}_x \quad (6.2)$$

γ s'interprète donc comme une **force linéique**.

Remarque : Les ordres de grandeur donnés précédemment en mJ/m^2 correspondent donc également à des mN/m .

Formulation thermodynamique Comme l'énergie interne est une fonction d'état, on peut exprimer sa différentielle selon un chemin quasi-statique et réversible bien choisi :

$$dU = TdS + \gamma d\mathcal{A} - pdV \quad (6.3)$$

Cela permet d'écrire :

$$\gamma = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{A}} \right)_{S,V} \quad (6.4)$$

Pour définir l'énergie libre, on effectue une transformation de Legendre de façon à substituer la variable T à la variable S , difficile à fixer expérimentalement :

$$F = U - TS \quad (6.5)$$

D'où :

$$dF = -SdT - pdV + \gamma d\mathcal{A} \quad (6.6)$$

Ainsi :

$$\gamma = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{A}} \right)_{T,V} \quad (6.7)$$

Remarquons que ces deux formules font intervenir une variation d'aire à volume constant, donc un changement de forme. En pratique, il est rare de contrôler le volume. On raisonne souvent à température et à pression fixées. Ainsi, pour définir l'enthalpie libre, on substitue p à V :

$$G = F + pV \quad (6.8)$$

D'où :

$$dG = Vdp - SdT + \gamma d\mathcal{A} \quad (6.9)$$

Ainsi :

$$\gamma = \left(\frac{\partial G}{\partial \mathcal{A}} \right)_{T,P} \quad (6.10)$$

6.2 Interface entre deux fluides

6.2.1 Loi de Laplace

Exemple d'une bulle

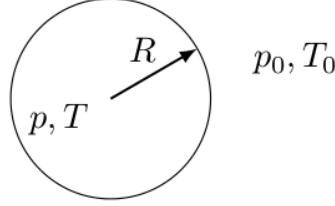


FIGURE 6.4 – Bulle de gaz en équilibre au sein d'un liquide.

Considérons une bulle sphérique de rayon R d'un fluide (1) immergée dans un autre fluide (2) (FIGURE 6.4). Cherchons l'équilibre de la bulle (1) dans le fluide (2) dans un thermostat à la température T_0 et à la pression p_0 . On néglige les effets de la pesanteur. Comme T_0 et p_0 sont fixés par l'extérieur, l'équilibre correspond au minimum de son enthalpie libre externe G_0 :

$$G_0 = U - T_0 S + p_0 V \quad (6.11)$$

Pour exprimer la différentielle de G_0 , on écrit :

$$dU = TdS - pdV + \gamma d\mathcal{A} \quad (6.12)$$

D'où :

$$dG_0 = (T - T_0)dS + (p_0 - p)dV + \gamma d\mathcal{A} \quad (6.13)$$

Mais, pour une bulle sphérique, le volume V et l'aire $\mathcal{A}$ sont reliés :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = 4\pi r^2 \quad (6.14)$$

D'où :

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad \text{et} \quad d\mathcal{A} = 8\pi r dr \quad (6.15)$$

Ainsi :

$$dG_0 = (T - T_0)dS + 4\pi r^2 \left[(p_0 - p) + \frac{2\gamma}{r} \right] dr \quad (6.16)$$

À l'équilibre, G_0 est minimal par rapport aux deux variables internes indépendantes S et r .

On a donc :

$$T = T_0 \quad \text{et} \quad p = p_0 + \frac{2\gamma}{r} \quad (6.17)$$



L'équilibre impose donc l'équilibre thermique avec l'extérieur d'une part, mais également une égalité sur les pressions, qui porte le nom de **loi de Laplace**.

La tension superficielle tend à minimiser la surface de la bulle, donc son rayon. S'il y a équilibre mécanique de la bulle, il faut une surpression pour s'y opposer.

On note $\Delta p = \frac{2\gamma}{r}$ la surpression au sein de la bulle de gaz.

- goutte d'aérosol : $r = 1 \mu\text{m}$: $\Delta p = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$;

- bulle de taille macroscopique : $r = 1 \text{ cm}$: $\Delta p = 10^1 \text{ Pa} = 0.1 \text{ mbar}$.

Nous avons ici choisi une bulle sphérique, mais rien ne l'impose *a priori*. Cependant, en l'**absence d'autres contraintes**, la surface tend à être minimisée par rapport au volume, et la sphère satisfait à cette contrainte.

Cas général

Tout plan normal à la surface en un point régulier M, découpe sur celui-ci une courbe plane. Celle-ci peut être assimilée au voisinage de M à un cercle de rayon R .

Pour tout couple de plans normaux à la surface en M, perpendiculaires entre eux, on définit deux rayons de courbure R et R' . On peut montrer que, quelque soit le choix de ces plans, la grandeur $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ est constante. Cette grandeur est appelée **courbure moyenne** en M et est notée C .

L'accroissement de pression Δp qui se produit à la surface de séparation des deux fluides est :



$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = \gamma C \quad (6.18)$$

Pour une sphère, $R = R'$ et on retrouve la loi démontrée précédemment $\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$.

6.2.2 Film liquide – bulles de savon

Un **tensioactif** est une molécule qui a deux parties d'affinités différentes : une partie hydrophile qui se mélange à l'eau, et une partie hydrophobe, en général une longue chaîne alkyle, qui ne s'y mélange pas. Un exemple est proposé FIGURE 6.5 à gauche.

Un film de savon, schématisé FIGURE 6.5 à droite, est constitué d'une fine épaisseur d'eau entourée de molécules tensioactives, qui retiennent l'eau et assurent ainsi sa relative stabilité. L'épaisseur du film est de l'ordre du μm .

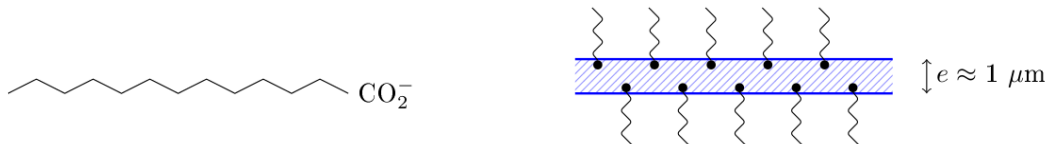


FIGURE 6.5 – (Gauche) Exemple de molécule tensioactive. (Droite) Schéma d'un film de savon.

Il y a deux interfaces eau/air avec la même courbure donc la surpression au sein d'une bulle de savon est :

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R} + \frac{2\gamma}{R} = \frac{4\gamma}{R} \quad (6.19)$$

La démonstration peut se faire en utilisant les potentiels thermodynamiques.

Si on met deux bulles de savon en contact, la pression dans la plus petite est plus élevée que dans la grande : un écoulement apparaît donc de la petite vers la grande : la petite bulle de savon se vide dans la grande.



Pour un film de savon quelconque, on peut là encore généraliser la loi de Laplace et écrire :

$$\Delta p = 2\gamma C \quad (6.20)$$

où C désigne la courbure moyenne de la surface.

6.3 Interface triple – mouillage

6.3.1 Ligne triple - loi de Young-Dupré

Le mouillage est l'étude de l'étalement d'un liquide déposé sur un substrat solide : il fait intervenir trois interfaces : liquide/gaz, liquide/solide et gaz/solide. Cette question intervient dans de nombreux domaines de la vie quotidienne ou de l'industrie :

- industrie automobile (vitres, pneumatiques)
- industrie pétrolière (mouillage des roches poreuses, récupération assistée du pétrole)
- industrie chimique (peintures, encres, colorants)
- industrie du bâtiment (hydrofugation du béton)
- physique des sols (imbibition)
- industrie cosmétique, etc.

Paramètre d'étalement

On observe que si on dépose une goutte d'eau sur une plaque de verre propre, elle s'étale. En revanche, si on fait de même sur une feuille de plastique, ça n'est pas le cas.

Afin de voir si l'étalement d'une goutte est énergétiquement favorable ou non, on compare l'énergie d'une interface solide/vide à l'énergie de cette interface recouverte de liquide (FIGURE 6.6).



FIGURE 6.6 – Paramètre d'étalement : comparaison entre mouillage total (gauche) et aucun mouillage (droite).

La différence d'énergie par unité de surface est :

$$\begin{aligned} S &= E_{\text{substrat sec}} - E_{\text{substrat mouillé}} \\ &= \gamma_{SG} - (\gamma_{SL} + \gamma) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Cette grandeur est appelée paramètre d'étalement. On distingue alors deux cas :

- $S > 0$: le mouillage est dit total. Pour abaisser l'énergie, le film s'étale complètement (FIGURE 6.7 à gauche).
- $S < 0$: le mouillage est dit partiel : la goutte ne s'étale pas et forme à l'équilibre une calotte sphérique qui s'appuie sur le substrat, et qui forme un angle θ_E , nommé **angle de contact** (FIGURE 6.7 à droite).



FIGURE 6.7 – Goutte en mouillage total (à gauche) et en mouillage partiel (à droite).

Lorsque les énergies de liaisons chimiques au sein du solide sont covalentes, ioniques ou métalliques, elles sont de l'ordre de l'eV et la tension de surface est alors $\gamma_{SV} \approx 10^3$ mN/m. La plupart des liquides auront tendance à facilement mouiller sur ces surfaces. Cependant, elles sont facilement contaminées par des impuretés de l'environnement.

Lorsque les énergies sont de type Van der Waals (polymères par exemple), γ_{SV} est beaucoup plus petit et le mouillage est alors partiel.

Loi de Young-Dupré

On considère le cas d'un mouillage partiel, la goutte ne s'étale pas. On cherche alors à quantifier l'angle θ_E qui résulte de l'équilibre entre les trois tensions de surface. On adopte une approche énergétique.

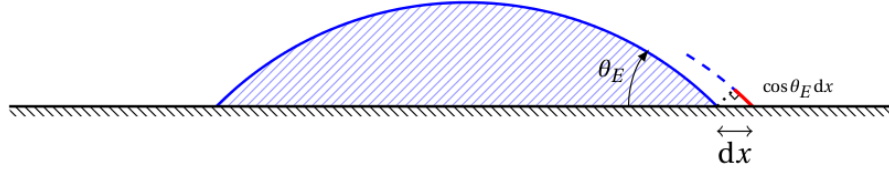


FIGURE 6.8 – Démonstration de la loi de Young-Dupré

Si la goutte s'étale, l'interface se déplace de dx (voir figure 6.8), la variation d'aire des différentes interfaces est :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_{SG} &= -dx dl \\ d\mathcal{A}_{SL} &= dx dl \\ d\mathcal{A}_{LG} &= \cos \theta_E dx dl \end{aligned}$$

D'où :

$$dE_p = \gamma_{SG}(-dx dl) + \gamma_{SL}(dx dl) + \gamma(\cos \theta_E dx dl) \quad (6.22)$$

La condition d'équilibre s'écrit $dE_p = 0$ donc :

$$-\gamma_{SG} + \gamma_{SL} + \gamma \cos \theta_E = 0 \quad (6.23)$$

On obtient ainsi la **loi de Young-Dupré**.



$$\cos \theta_E = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma} \quad (6.24)$$

On distingue par convention un liquide partiellement mouillant pour $\theta_E \leq \pi/2$ d'un liquide non-mouillant pour $\theta_E \geq \pi/2$.



FIGURE 6.9 – (Gauche) Interprétation en terme de force. (Droite) Déformation du substrat par la ligne triple).

On peut interpréter la loi de Young-Dupré en terme de forces. En projetant le bilan du schéma selon l'axe horizontal (FIGURE 6.9 à gauche), on retrouve le résultat.

On remarque que le bilan n'est pas équilibré selon l'axe vertical : la présence de liquide déforme légèrement la surface (FIGURE 6.9 à droite). L'ordre de grandeur de cette déformation est $\gamma/E \approx 10^{-10}$ m.

Mesure de l'angle de contact

- Pour des angles suffisamment élevés, typiquement supérieurs à $\pi/4$, on peut mesurer l'angle de contact sur une photographie.
- Pour des angles plus petits, on peut utiliser la réflexion ou la transmission d'un faisceau parallèle.
- Pour des angles très faibles, on utilise des méthodes interférométriques.

La mesure est souvent peu reproductible car très affectée par l'état de propreté des surfaces.

Remarque : La démonstration de la loi de Young-Dupré donne le bon dE_p , mais présente un défaut : si x varie, θ_E varie également. On peut réaliser une démonstration plus rigoureuse, mais l'idée physique reste la même.

6.3.2 Mesure de tension de surface : tensiométrie par arrachement

Pour mesurer la tension de surface, on peut utiliser un tensiomètre à arrachement. Un anneau est immergé dans un liquide, il subit deux forces de tension de surface : la force due à l'interface solide/liquide et celle due à l'interface gaz/solide. La force exercée par l'anneau sur le liquide est :

$$\mathbf{F}_\gamma = -\gamma_{LS}p\mathbf{e}_z + \gamma_{SV}p\mathbf{e}_z \quad (6.25)$$

Où p désigne le périmètre de la ligne triple. Donc, par la loi de Young :

$$\mathbf{F}_\gamma = \gamma \cos \theta_E p \mathbf{e}_z \quad (6.26)$$

Lorsque la force capillaire est alignée avec la verticale, la force mesurée par le dynamomètre est maximale et on est à la limite d'arrachement $\theta_E \rightarrow 0$. Notons que la poussée d'Archimède n'intervient plus. Le bilan complet des forces est représenté FIGURE 6.10.

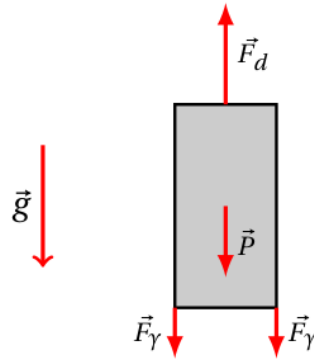


FIGURE 6.10 – Bilan de forces sur le tensiomètre de Du Noüy.

On a alors, à la limite de l'arrachement :

$$F_d = mg + \gamma p \quad (6.27)$$

6.4 Compétition entre capillarité et pesanteur

6.4.1 Longueur capillaire

Les effets de capillarité sont des effets de surface. Nous avons jusqu'ici présenté des situations où plusieurs effets de tension superficielle sont en compétition. Mais, pour des objets de grande taille, les effets de surface sont masqués par les forces volumiques, comme la gravité : de l'eau dans un verre ne prend pas une forme sphérique.

Nommons l l'échelle de longueur du problème. La différence de pression associée à la pesanteur est ρgl , la différence de pression associée à la courbure de l'interface est γ/l . On peut alors négliger les effets de surface devant la gravité si

$$\rho gl \gg \frac{\gamma}{l} \quad \text{i.e.} \quad l \gg \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (6.28)$$

On définit alors



$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (6.29)$$

l'échelle de longueur au-delà de laquelle la gravité devient prépondérante. Cette longueur s'appelle la **longueur capillaire**.

Pour l'eau, sur Terre, $e = 7.10^{-2}$ N/m, $\rho = 1000$ kg.m⁻³, $g = 9.81$ m.s⁻². Dans ce cas : $l_c = 2.6$ mm

6.4.2 Forme des gouttes larges en mouillage partiel

Pour des petites gouttes, la pression y est homogène et résulte de la courbure de l'interface par la loi de Laplace. Pour des grosses gouttes, la goutte est aplatie car le coût en énergie potentielle pour garder la forme sphérique est supérieur au gain en énergie de surface.

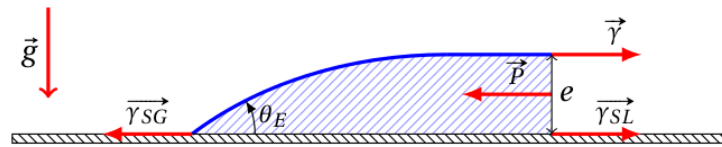


FIGURE 6.11 – Forme d'une goutte large.

La goutte forme alors à l'équilibre une galette liquide d'épaisseur e . Calculons e par équilibre des forces horizontales agissant sur la portion de liquide. On considère les forces agissant sur la partie de la goutte schématisé FIGURE 6.11.

On applique le théorème du centre de masse projeté sur l'axe horizontal.

$$\mathbf{P} + \gamma + \gamma_{SL} = 0 \quad (6.30)$$

Or :

$$\mathbf{P} = \int_0^e -\rho g z dz \mathbf{e}_x = -\rho g \frac{e^2}{2} \mathbf{e}_x \quad (6.31)$$

Donc :

$$-\frac{1}{2}\rho g e^2 + \gamma + \gamma_{SL} - \gamma_{SG} = 0 \quad (6.32)$$

Or, par la loi de Young-Dupré, $\gamma_{SL} - \gamma_{SG} = -\gamma \cos \theta_E$. D'où :

$$\rho g e^2 = 2\gamma(1 - \cos \theta_E) \quad (6.33)$$

En faisant intervenir la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ et en remarquant que $1 - \cos \theta_E = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta_E}{2} \right)$, on obtient finalement :

$$e = 2l_c \sin \left(\frac{\theta_E}{2} \right) \quad (6.34)$$

Quelques chiffres dessus pour l'eau :

- $\theta_E = 1^\circ$, $e = 46 \mu\text{m}$, l'étalement de 10 L se fait sur 200 m².
- $\theta_E = 180^\circ$, $e = 5.3$ mm, l'étalement de 10 L se fait sur 2 m².

6.4.3 Autres manifestations de la longueur capillaire

Ménisques et perturbation d'une interface La longueur capillaire est la longueur d'atténuation de la perturbation d'une surface par un sphère ou une paroi par exemple.

Si le ménisque est peu courbé, on peut montrer que $y \sim e^{-z/l_c}$.

Stalagtométrie – Forme des gouttes pendantes

- On peut déterminer la longueur capillaire (donc la tension de surface) par l'analyse de la forme d'une goutte pendante. C'est l'équilibre de pression $\rho g z = \gamma C$, équation qui peut être adimensionnée par l_c .
- On remarque également que le rayon d'une goutte est assez reproductible, et ne dépend que du rayon R du tube utilisé. Une partie reste accrochée tandis que l'autre se décroche et on a :

$$V = \frac{3}{2\alpha} l_c^2 R \quad (6.35)$$

Ou encore :

$$R_g = \left(\frac{3}{2\alpha} l_c^2 R \right)^{1/3} \quad (6.36)$$

R désigne le rayon du tube, et $\alpha \approx 0.6$ un coefficient que l'on peut déterminer par étalonnage.

Annexe A

Formulaire mathématique

A.1 Théorème de Green-Ostrogradski

Soit $\mathbf{F}$ un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On considère un volume V de frontière ∂V . Enfin on prend $\mathbf{dS}$ le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur et de longueur égale à l'élément de surface qu'il représente. Alors on a l'égalité suivante :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} \quad (\text{A.1})$$

A.2 Théorème de Stokes

Soit $\mathbf{F}$ un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On considère une surface S de frontière fermée C . Enfin on prend $\mathbf{dS}$ le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur et de longueur égale à l'élément de surface qu'il représente et $\mathbf{dl}$ un élément de longueur sur le contour C . Alors on a l'égalité suivante :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{dS} \quad (\text{A.2})$$

A.3 Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{u}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} = & \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \right) \mathbf{u}_r \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \right) \mathbf{u}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

A.4 Analyse vectorielle en coordonnées sphériques

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(\sin \varphi A_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{A} = & \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{\partial(\sin \varphi A_\theta)}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right) \mathbf{u}_r + \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\varphi \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\triangle f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r A_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \varphi^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 A_r}{r^2} - \frac{2 \cot \varphi}{r^2} A_\varphi \right) \mathbf{u}_r \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r A_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) \mathbf{u}_\varphi \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r A_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

A.5 Relations vectorielles utiles

$$\nabla \wedge (\nabla f) = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$$

$$\triangle f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

$$\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_x) \mathbf{u}_x + (\Delta A_y) \mathbf{u}_y + (\Delta A_z) \mathbf{u}_z$$

$$\nabla(fg) = f \cdot \nabla(g) + g \cdot \nabla(f)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot (\mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot (\mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\rho \cdot \mathbf{V}) = \rho \nabla \cdot (\mathbf{V}) + \nabla(\rho) \cdot \mathbf{V}$$

$$\nabla \wedge (\rho \cdot \mathbf{V}) = \rho \nabla \wedge \mathbf{V} + \nabla(\rho) \wedge \mathbf{V}$$

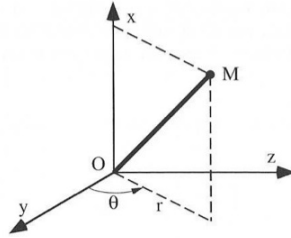
$$\triangle(fg) = f \cdot \triangle g + 2 \nabla(f) \cdot \nabla(g) + g \cdot \triangle f$$

Annexe B

Dynamique en coordonnées cylindriques et sphériques

B.1 Coordonnées cylindriques

B.1.1 Notations (r, θ, x)



B.1.2 Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

B.1.3 Équation de Navier-Stokes

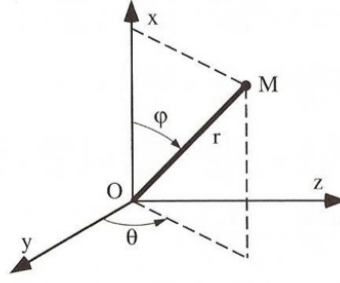
$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \rho f_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \rho f_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\ = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \rho f_x \end{aligned}$$

B.2 Coordonnées sphériques

B.2.1 Notations (r, φ, θ)



B.2.2 Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(\sin \varphi u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$$

B.2.3 Équation de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi^2 + u_\theta^2}{r} \right) = \\ - \frac{\partial P}{\partial r} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r u_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\coth \varphi}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 u_r}{r^2} - \frac{2 \coth \varphi}{r^2} u_\varphi \right) + \rho f_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\varphi}{r} - \frac{u_\theta^2 \coth \varphi}{r} \right) = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r u_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\coth \varphi}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right. \\ \left. - \frac{2 \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) + \rho f_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta u_\varphi \coth \varphi}{r} \right) = \\ - \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r u_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\coth \varphi}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) + \rho f_\theta \end{aligned}$$

Annexe C

Résultats utiles

C.1 Potentiels des vitesses et fonctions de courant d'écoulements plans

Type d'écoulement	Potentiel des vitesses	Fonction de courant
écoulement uniforme à deux dimensions	$\Phi = U x$	$\Psi = U y$
écoulement uniforme à trois dimensions de vitesse U (coordonnées cylindriques)	$\Phi = U x$	$\Psi = -U \frac{r^2}{2}$
écoulement uniforme à trois dimensions de vitesse U (coordonnées sphériques)	$\Phi = U r \cos \varphi$	$\Psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \varphi$
tourbillon (coordonnées cylindriques)	$\Phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$	$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{r}{r_0}$
source ponctuelle 2D (coordonnées cylindriques)	$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{r}{r_0} \right)$	$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$
source ponctuelle 3D (coordonnées sphériques)	$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r}$	$\Psi = -\frac{Q}{4\pi} \cos \varphi$
dipôle de courant 2D (coordonnées cylindriques)	$\Phi = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{2\pi r^2}$	$\Psi = +\frac{p}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}$
dipôle de courant 3D (coordonnées sphériques)	$\Phi = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$	$\Psi = \frac{p \sin^2 \varphi}{4\pi r}$
écoulement autour d'un cylindre circulaire	$\Phi = U r \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$	$\Psi = -U r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$
écoulement autour d'une sphère (coordonnées sphériques)	$\Phi = U r \cos \varphi \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right)$	$\Psi = \frac{U}{2} \left(r^2 - \frac{R^3}{r} \right) \sin^2 \varphi$
dièdre d'angle $\alpha = \frac{\pi}{m+1}$	$\Phi = C r^{m+1} \cos(m+1)\theta$	$\Psi = C r^{m+1} \sin(m+1)\theta$

C.2 Relation fonction de courant - composantes des vitesses

Écoulement à deux dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$	$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$
Écoulement à deux dimensions (coordonnées polaires)	$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$	$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$
Écoulement de révolution (coordonnées cylindriques)	$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$	$v_x = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$
Écoulement de révolution (coordonnées sphériques)	$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$	$v_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$

C.3 Relation potentiel des vitesses - composantes des vitesses

Ces relations sont simplement les expressions en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques de la relation générale $\mathbf{v} = \nabla \Phi$.

Écoulement à deux dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	
Écoulement à deux dimensions (coordonnées polaires)	$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$	
Écoulement à trois dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$
Écoulement à trois dimensions (coordonnées cylindriques)	$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$	$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$
Écoulement à trois dimensions (coordonnées sphériques)	$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$	$v_\theta = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$